Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» 2009/2010.
Математика. Заочный тур.

Задания для 11 класса

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $y < 1 + x(y^2 - 1)$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3 - x = \sqrt{1 - y^2} \\ 4 - y = \sqrt{16 - x^2} \end{cases}$.

3. Решите неравенство $\dfrac{x^2 - (\sin 3 + \sin 4)x + (\sin 3) \cdot (\sin 4)}{x^2 - \cos^2 4} < 0.$

4. Докажите, что если у остроугольного треугольника все стороны меньше 1, то $R < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, где R – радиус окружности, описанной около треугольника.

5. .В какой точке графика функции $y = x^2 + x + 2$, $x \in [0;1]$, нужно провести касательную, чтобы площадь трапеции, ограниченной этой касательной и прямыми x=0, x=1 и y=0, была наибольшей?

6. Найдите все натуральные числа n, для которых $n!$ в десятичной записи оканчивается 2010 нулями. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.)

7. Можно ли расположить на плоскости семь многоугольников (не обязательно выпуклых) так, чтобы каждый многоугольник пересекался ровно с тремя другими?

8. Найдите наименьшее натуральное число, у которого количество всех натуральных делителей равно 2010.

9. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD=2 и BC=1. Боковая сторона AB, равная 1, перпендикулярна основаниям. На сторонах BC и CD взяты соответственно точки M и N такие, что $\angle MAN$=45°. Найдите все углы треугольника MAN.

10. Данный квадрат требуется разрезать на 5 частей, из которых можно было бы сложить два квадрата так, чтобы у одного из этих квадратов сторона была вдвое больше, чем у другого. (Укажите построение при помощи циркуля и линейки, на основании которого проводится разрезание.)