Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» 2009/2010.
Математика. ФИНАЛ.
Решения

Задачи для 9 и 10 классов

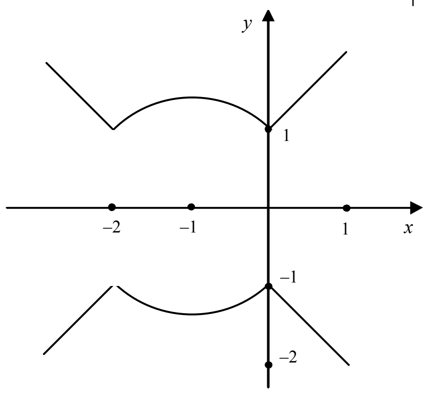
9-10.1 Найдите множество значений параметра а, при которых уравнение $x^2 - 6ax + \left(2 - 2a + 9a^2\right) = 0$ имеет два корня, большие числа 3.

Ответ. $a > \dfrac{11}{9}$.

Решение. Условие задачи равносильно неравенству $3a - \sqrt{9a^2 - (2 - 2a + 9a^2)} > 3$, причём подкоренное выражение должно быть строго положительно, т.е. $a > 1$ и

$$\sqrt{2(a-1)} < 3(a-1) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ 2(a-1) < 9(a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow a - 1 > \frac{2}{9}.$$

9-10.2 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\left|x^2 + 2x\right| = y^2 - 1$.



Решение. Если $x^2 + 2x \ge 0$, т.е. при $x \ge 0$ или $x \le -2$, уравнение принимает вид $x^2 + 2x = y^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = y^2$. Этому случаю на координатной плоскости соответствуют части двух прямых $x + 1 = y$ и $-x - 1 = y$, лежащие вне полосы $-2 < x < 0$.

Если же $x^2 + 2x \le 0$, т.е. при $-2 < x < 0$, уравнение примет вид $-x^2 - 2x = y^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + y^2 = 2$. Этому случаю на координатной плоскости соответствует часть окружности с центром в точке (–1;0) радиуса $\sqrt{2}$, лежащая внутри полосы $-2 < x < 0$. В результате получим множество, изображенное на рисунке.

9-10.3 Существует ли выпуклый 2010-угольник, у которого все углы выражаются целым числом градусов?

Ответ. Не существует.

Решение. Предположим, от противного, что такой многоугольник существует. Тогда сумма его внешних углов будет не менее $1° \cdot 2010 = 2010°$, что противоречит теореме о сумме внешних углов выпуклого многоугольника (эта сумма всегда равна 360°). Противоречие.

9-10.4 Докажите, что уравнение $2^{2010}+2^{1010}+2^{x}=y^{2}$ в натуральных числах имеет не менее трёх решений

<u>Решение</u>. Представим левую часть в виде квадрата суммы двух чисел в разных вариантах, а именно: 1) $(2^{1005}+2^{505})^2$; 2) $(2^{1005}+2^{x/2})^2$; 3) $(2^{505}+2^{x/2})^2$. В первом варианте $2^x=2\cdot 2^{1510}\Leftrightarrow x=1511$. Во втором варианте $2^{1010}=2\cdot 2^{1005+x/2}\Leftrightarrow x=8$. В третьем варианте $2^{2010}=2\cdot 2^{505+x/2}\Leftrightarrow x=3008$.

9-10.5 В трапеции *ABCD* точка *N* – середина боковой стороны *CD,* отрезки *AN* и *NB* перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если площадь треугольника *ANB* равна *S*.

<u>Ответ</u>. 2*S*.

<u>Комментарий</u>. Условие перпендикулярности $AN\perp NB$ является излишним, но при этом условии задача допускает различные решения.

<u>Первое решение</u> (без использования условия $AN\perp NB$). Проведем среднюю линию *MN* и подсчитаем площадь $\Delta\, ABN$ как сумму площадей $\Delta\, AMN$ и $\Delta\, BMN$ с общим основанием *MN* и равными высотами $\frac{h}{2}$ (где *h* – высота трапеции). Таким образом, $S=2\left(\frac{1}{2}\cdot MN\cdot\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{2}MN\cdot h=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

<u>Второе решение</u> (с использованием условия $AN\perp NB$). В прямоугольном треугольнике *ABN* медиана *MN* равна половине гипотенузы *AB*. Поэтому в равнобедренном треугольнике *AMN* равны углы при основании, а значит, $\angle MAN=\angle MNA=\angle NAD$. Таким образом, *N* лежит на биссектрисе угла *A* и поэтому высота в треугольнике *ABN*, опущенная из вершины *N*, равна $\frac{h}{2}$. В результате получим: $S=\frac{1}{2}AB\cdot h_{AB}=\frac{1}{2}\left(2MN\cdot\frac{h}{2}\right)=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.