Задачи для 11 класса

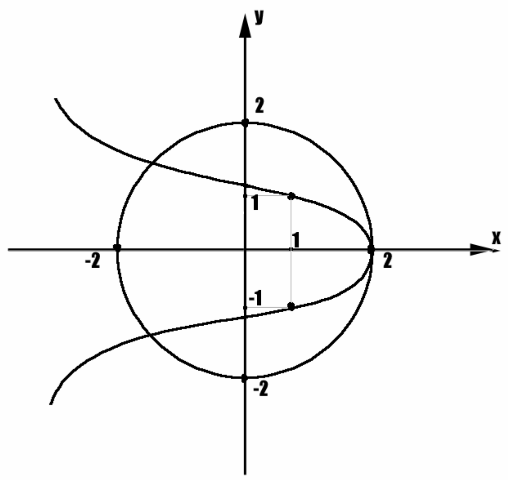
11.6 Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin(\frac{\pi}{2}(2x^2+1))+\cos(\pi(x^2+4x))=0$.

Ответ: $-1+\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Решение. Записав первое слагаемое как $\cos\pi x^2$ и преобразовав сумму косинусов в произведение, получим две серии корней $4x=2n+1$ и $2x^2+4x=2m+1$ (m,n – целые). Положительные корни имеют вид $x=\frac{n}{2}+\frac{1}{4}$ и $x=-1+\sqrt{m+\frac{3}{2}}$ (где m,n – неотрицательные целые). Для этих серий наименьшие корни – это $\frac{1}{4}$ и $-1+\sqrt{\frac{3}{2}}<\frac{1}{4}$ (последнее неравенство проверяется при возведении в квадрат обеих частей эквивалентного неравенства $\sqrt{\frac{3}{2}}<\frac{5}{4}$).

11.7 Найдите все значения параметра а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ x+\log_2(y^2+1)=a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: a=0.



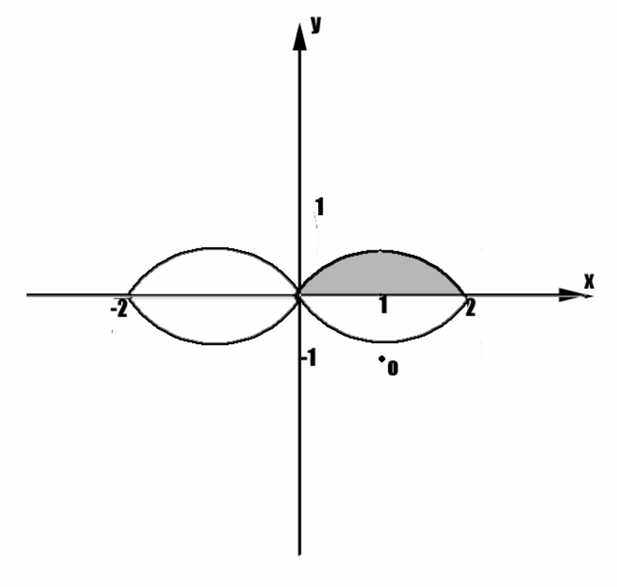
Решение. Заметим, что если (x,y) – решение системы, то и (x, -y) тоже является решением этой системы. Поэтому если для параметра a система имеет единственное решение, то значение y должно быть равно нулю. Тогда из второго уравнения имеем $x=a$, и подставляя в первое уравнение $x=a$, $y=0$, получим $a^2=2a$. Значит, a=0 или a=2. Теперь необходимо проверить эти значения a (отметим, что они получены как следствие единственности решения системы, но на самом деле ещё не гарантируют единственности).

При а=0 первое уравнение эквивалентно равенствам $x=y=0$, и для этих нулевых значений неизвестных второе уравнение удовлетворяется, т.е. значение a=0 подходит.

При a=2 система имеет решение x=2, y=0 , но для системы это решение – не единственное. Действительно, кривая $x=2-\log_2(y^2+1)$ пересекает окружность $x^2+y^2=4$ не только в точке (2; 0) , но ещё в двух симметричных точках из второго и третьего квадрантов. (см. рис.). Это следует из того, что точки (1;1) и (1;-1) лежат на данной кривой и расположены внутри окружности $x^2+y^2=4$ (или можно убедиться, что такими будут и точки (0; $\pm\sqrt{3}$) на оси Oy), а при |y|>2 соответствующие точки кривой расположены вне окружности.

11.8 Найдите площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости неравенством $x^2+y^2\le 2(|x|-|y|)$.

Ответ: $2\pi-4$.



Решение. Очевидно, фигура симметрична относительно координатных осей и начала координат (поскольку неравенство не изменяется при изменении знаков *x*, *y*). Поэтому достаточно рассмотреть часть фигуры в первом квадранте и площадь этой части умножить на 4. При неотрицательных *x, y* неравенство запишется в виде $(x-1)^2+(y+1)^2 \le 2$. Таким образом, в первом квадранте имеем часть круга радиуса $\sqrt{2}$ с центром $(1;-1)$ (см. рис.). Данная часть круга является сегментом с центральным углом 90° (это угол между двумя радиусами, проведенными в граничные точки (0;0) и (2;0)) данного сегмента. Поэтому площадь сегмента равна $\pi(\sqrt{2})^2/4-1$, а искомая площадь фигуры равна $2\pi-4$.

11.9 Существует ли 2010-угольник со сторонами длины 1, 2, …, 2010 (в некотором порядке), в который можно вписать окружность?

Ответ: Не существует.

Решение. Если в многоугольник с четным числом сторон можно вписать окружность, то сумма длин сторон с нечетными номерами (начиная отсчет против часовой стрелки с некоторой фиксированной вершины) равен сумме длин сторон с четными номерами. Этот факт доказывается точно так же, как соответствующая теорема из школьного курса для четырехугольника (нужно отметить равные отрезки касательных на соседних сторонах). В нашем случае сумма всех длин сторон равна нечетному числу 1+2+…+2010=$1005\cdot 2011$. Поэтому не удастся разбить 2010 данных отрезков на две части с одинаковыми суммами.

11.10 **а)** Найдите приведённый квадратный трёхчлен *P(x)*, для которого график y=*P(x)* симметричен относительно оси Oy и касается прямой *y=x*.

б) Пусть *P(x)* – квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Докажите, что если уравнение *P(x)=x* имеет единственное решение, то уравнение *P(P(x))=x* также имеет единственное решение.

Ответ: **а**) *P*(*x*)= $x^2+1/4$.

Решение. **а**) Условие симметрии относительно оси Oy означает, что *P(x)* имеет вид *P(x)* = x^2+a. Условие касания прямой *y=x* означает, что квадратное уравнение $x^2+a=x$.имеет единственное решение, т.е. его дискриминант $1-4a$ равен нулю.

б) Поскольку уравнение *P(x)=x* имеет единственное решение, скажем, x_0, то график *y=P(x)* расположен выше прямой *y=x* всюду, кроме единственной точки (x_0, x_0)– точки пересечения. Поэтому при $x \ne x_0$ имеем $P(P(x)) \ge P(x) > x$, т.е. уравнение *P(P(x))=x* не имеет других корней, кроме x_0.