Система оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

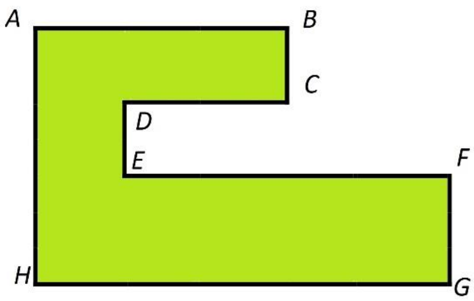
Ответы и решения

1. Ответ: 29. Решение. Пусть мотоцикл проехал на M кругов больше, чем велосипедист, а автомобиль – на A кругов больше велосипедиста. Заметим при этом, что путь велосипедиста не обязан равняться целому числу кругов, но разности путей должны быть целыми.

Тогда мотоцикл обогнал велосипедиста $(M-1)$ раз, автомобиль обогнал мотоциклиста $(A-M-1)$ раз, автомобиль обогнал велосипедиста $(A-1)$ раз. И всего обгонов будет $M-1+A-M-1+A-1=2A-3$. При этом по условию $A-1=15$, то есть $A=16$. Значит, всего обгонов будет $2\cdot 16-3=29$.

2. Ответ: 4 минуты. Решение. Получается восьмиугольник, имеющий форму, показанную на рисунке.

По условию, время прохождения отрезка AH равно 8, время прохождения отрезка EF равно 5. Пусть искомое время прохождения отрезка AB равно x, время прохождения отрезка DC равно y. Тогда $HG = 5 + x – y$. Кроме того, $BC+DE+FG=AH=8$.



Тогда периметр парка равен

$AB+DC+EF+HG+AH+(BC+DE+FG)$.

Так как скорость движения Гаврилы постоянная, то после деления на скорость получается уравнение для соответствующих времен:

$$34=x+y+5+(5+x-y)+8+8 \Leftrightarrow 34=2x+26 \Leftrightarrow x=4.$$

3. Ответ: 405 кг/м^3 и 607,5 кг/м^3. Решение. Обозначим одинаковые массы частей через m, плотности через 2ρ и 3ρ. Тогда первая часть имеет объем $\frac{m}{2\rho}$, а вторая – $\frac{m}{3\rho}$. Значит, масса бруска равна $2m$, а объем равен $\frac{m}{2\rho}+\frac{m}{3\rho}=\frac{5m}{6\rho}$.

Получаем уравнение $\frac{2m\cdot 6\rho}{5m}=486$, откуда $\rho = 486\cdot\frac{5}{2\cdot 6}=\frac{405}{2}$.

Значит, плотности частей равны 405 кг/м^3 и 607,5 кг/м^3 соответственно.

4. Ответ: 3 : 2. Решение. Из второго закона Ньютона: $\begin{cases} m_1a_1 = m_1g - F, \\ m_2a_2 = m_2g - F. \end{cases}$

Так как $a_1 = \frac{1}{2}g$, $a_2 = \frac{1}{4}g$, то $\begin{cases} F = \frac{m_1 g}{2}, \\ F = \frac{3m_2 g}{4}, \end{cases}$ то есть $\frac{m_1}{m_2} = \frac{3}{2}$.

5. Ответ: не сможет. Решение. Запишем уравнение баланса тепла: $cV\rho(t-t_1) = C(t_1-t_0)$. Здесь t_1 – температура жидкости, которая установится в жидкости, после опускания в нее термометра. Обозначим $k=\frac{C}{cV\rho}=0{,}01$ и выразим разность температур:

$$(t-t_1)=\frac{k(t-t_0)}{k+1}, \text{ где } 80^oC \le t \le 90^oC.$$

Чем больше разность $(t-t_0)$, тем больше погрешность измерения. Максимальная ошибка составит

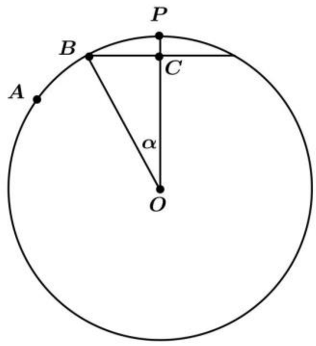
$$(t-t_1)=\frac{0{,}01(90-20)}{1{,}01}\approx 0{,}7^oC.$$

Поэтому делаем вывод о том, что измерить температуру с точностью до $0{,}5°C$ Гаврила не сможет.

6. Ответ: $8+\frac{4}{\pi}\approx$ 9,3 км.

Решение. Возможная точка старта на Южном полюсе отвергается последним условием. Также невозможно стартовать на 3 км (или соответственно на 5 км) южнее Северного полюса, так как на полюсе движение на восток или запад невозможно.

Единственная возможность для первого медведя: стартовать чуть дальше, чем за 3 км до Северного полюса, затем совершить один или несколько полных кругов вокруг полюса суммарной длиной 3 км и вернуться в исходную точку. Если делается ровно n кругов, то $n \cdot 2\pi r = 3$, то есть радиус круга равен $r = \frac{3}{2\pi n}$. При этом (см. рисунок) $BC = r$, $AB = 3$. Получается $\sin\alpha = \frac{r}{R}$, где R – радиус Земли. Значит, расстояние от окружности до полюса BP равно $R\alpha = R \cdot \arcsin\left(\frac{r}{R}\right)$. Тогда расстояние от точки A до полюса равно $3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi n R}\right)$.



Аналогично точка старта второго медведя находится от Северного полюса на расстоянии $5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi k R}\right)$ (где k – количество кругов).

Расстояние *АБ* будем максимальным, если медведи приходят к полюсу с разных сторон и при этом $n = k = 1$. Тогда

$$АБ = 3 + R \cdot \arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + 5 + R \cdot \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right) = 8 + R \cdot \left(\arcsin\left(\frac{3}{2\pi R}\right) + \arcsin\left(\frac{5}{2\pi R}\right)\right).$$

Так как при малых α имеет место равенство $\sin\alpha \approx \alpha$, то получаем приближенное значение $АБ \approx 8 + R \cdot \left(\frac{3}{2\pi R} + \frac{5}{2\pi R}\right) \approx 8 + \frac{4}{\pi} \approx 9{,}3$ км.

Заметим, что здесь $\sin\alpha$ имеет порядок $\frac{2}{\pi R} < 10^{-4}$. Поэтому данная оценка оказывается очень точной. Ошибка составляет гораздо менее миллиметра.

Для школьников 7-9 классов оценка точности не требуется.