

Олимпиада школьников Ломоносов–2019
по механике и математическому моделированию

Вариант 199

1. Трактор тащит на полозьях очень длинную трубу. Гаврила прошел вдоль всей трубы с постоянной скоростью в направлении движения трактора и насчитал 210 шагов. Когда он пошел в обратном направлении с той же скоростью, количество шагов оказалось равным 100. Чему равна длина трубы, если шаг Гаврилы равен 80 см? Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Скорость трактора постоянна.

2. Какое наибольшее целое количество литров воды можно нагреть до температуры кипения с помощью количества теплоты, полученной от сгорания твердого топлива, если за первые 5 минут горения из топлива получается 480 кДж, а за каждую следующую пятиминутку на 25% меньше, чем за предыдущую. Начальная температура воды 20° С, температура кипения 100° С, удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/кг·К.

3. Трехступенчатая ракета-носитель состоит из ступеней цилиндрической формы. Все эти цилиндры подобны друг другу. Длина средней ступени в два раза меньше суммы длин первой и третьей ступеней. В заправленном состоянии масса средней ступени в 13/6 раз меньше суммарной массы заправленных первой и третьей ступеней. Найдите отношение длин первой и третьей ступени. Массами двигателей, приборов и самих оболочек ступеней можно пренебречь.

4. В некоторой точке берега широкой и бурной реки на расстоянии 100 м от моста Гаврила и Глафира установили сирену, подающую звуковые сигналы через равные промежутки времени. Вторую такую же сирену взяла с собой Глафира, которая села на велосипед и расположилась на том же берегу в начале моста. Гаврила сел в моторную лодку, находящуюся у берега посередине между первой сиреной и началом моста. Экспериментаторы стартуют одновременно, скорости велосипеда и моторной лодки относительно воды равны 20 км/ч и направлены перпендикулярно берегу. Оказалось, что звуковые сигналы от обеих сирен приходят к Гавриле одновременно. Определите, на каком расстоянии от точки старта будет находиться Гаврила, когда удалится от берега на расстояние 40 м. Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Берег реки прямолинейный, скорость течения в каждой точке направлена вдоль берега.

5. В безветренный день белый медведь оказался на отколовшейся от айсберга небольшой льдине посреди стоячей воды. Спасатели с зависшего над льдиной вертолета с помощью приборов определили, что животное ходит по окружности диаметром 8,5 метров. Каково же было их удивление, когда потом на фотографии они увидели цепочку следов медведя и диаметр этой траектории оказался равен 9 метров. При этом все измерения и расчеты были правильными. Предложите свое объяснение этого «парадокса».

Решения и ответы

1. Трактор тащит на полозьях очень длинную трубу. Гаврила прошел вдоль всей трубы в направлении движения трактора и насчитал 210 шагов. Когда он пошел в обратном направлении, количество шагов оказалось равным 100. Чему равна длина трубы, если шаг Гаврилы равен 80 см? Ответ округлите до ближайшего целого числа метров.

Решение. Пусть длина трубы равна x (метров), и за 1 шаг Гаврилы длиной a (м) труба перемещается на расстояние y (м). Тогда, если m и n — количество шагов Гаврилы в том и другом направлении, получаем два уравнения: $x = m(a - y)$, $x = n(a + y)$. Отсюда $\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = 2a$, и $x = \frac{2amn}{m+n}$. При данных числовых значениях получаем $x = \frac{2 \cdot 0,8 \cdot 210 \cdot 100}{210+100} = \frac{3360}{31} \approx 108,39$ (м).

Ответ. 108 м.

2. Какое наибольшее целое количество литров воды можно нагреть до температуры кипения с помощью количества теплоты, полученной от сгорания твердого топлива, если за первые 5 минут горения из топлива получается 480 кДж, а за каждую следующую пятиминутку на 25% меньше, чем за предыдущую. Начальная температура воды 20° С, температура кипения 100° С, удельная теплоемкость воды 4,2 кДж.

Ответ. 5 литров

Решение. Количество теплоты, необходимое для нагрева массы m воды в условиях задачи, определяется соотношением $Q = 4200(100 - 20)m = 336m$ кДж. С другой стороны, если за первые 5 минут получено количество теплоты $Q_0 = 480$ кДж. Тогда всего (правда за бесконечное время) будет получено $Q = 4Q_0$ количество теплоты. Тогда масса m определится из соотношения $m = \frac{4Q_0}{336} \approx 5,7$

То есть, целое количество литров воды, нагретой до 100 градусов, равно 5.

3. Трехступенчатая ракета-носитель состоит из ступеней цилиндрической формы. Все эти цилиндры подобны друг другу. Длина средней ступени в два раза меньше суммы длин первой и третьей ступеней. В заправленном состоянии масса средней ступени в 13/6 раз меньше суммарной массы заправленных первой и третьей ступеней. Найдите отношение длин первой и третьей ступени. Массами двигателей, приборов и самих оболочек ступеней можно пренебречь.

Ответ: $\frac{7}{5}$

Решение. Масса заправленной ступени пропорциональна третьей степени линейного размера $l_2 = \frac{1}{2}(l_1 + l_3)$, $l_2^3 = \frac{6}{13}(l_1^3 + l_3^3)$. Решая эту систему, получаем $\frac{l_1}{l_3} = \frac{7}{5}$ или $\frac{l_1}{l_3} = \frac{5}{7}$. Из инженерных соображений выбираем первый ответ, поскольку первая ступень обычно больше третьей.

4. В некоторой точке берега широкой и бурной реки на расстоянии 100 м от моста Гаврила и Глафира установили сирену, подающую звуковые сигналы через равные промежутки времени. Вторую такую же сирену взяла с собой Глафира, которая села на велосипед и расположилась на том же берегу в начале моста. Гаврила сел в моторную лодку, находящуюся у берега посередине между первой сиреной и началом моста. Экспериментаторы стартуют одновременно, скорости велосипеда и моторной лодки относительно воды равны 20 км/ч и направлены перпендикулярно берегу. Оказалось, что звуковые сигналы от обеих сирен приходят к Гавриле одновременно. Определите, на каком расстоянии от точки старта будет находиться Гаврила, когда удалится от берега на расстояние 40 м. Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Берег реки прямолинейный, скорость течения в каждой точке направлена вдоль берега.

Решение. Введем систему координат, ось x которой направлена вдоль берега, начало координат в точке старта Гаврилы. Сирена на берегу имеет координаты $(L, 0)$, $L = 50$ м, Глафира едет вдоль прямой $x = -L$. Так как экспериментаторы находятся на одинаковом расстоянии от берега, то равенство времен, которые нужны для прохождения звукового сигнала дает условие на координаты Гаврилы (x, y) :

$$x + L = \sqrt{(x - L)^2 + y^2}$$

или

$$y^2 = 4xL,$$

откуда

$$x = \frac{y^2}{4L}$$

что описывает параболу.

По условию известно значение $y = 40$ м. Расстояние от Гаврилы до места старта найдем по теореме Пифагора:

$$s = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{16L^2} + y^2} = \frac{y\sqrt{y^2 + 16L^2}}{4L} = 8\sqrt{26}$$

Так как $40,5^2 < (8\sqrt{26})^2 < 41^2$, ближайшее целое число метров 41.

Ответ 41.

5. В безветренный день белый медведь оказался на отколовшейся от айсберга небольшой льдине посреди стоячей воды. Спасатели с зависшего над льдиной вертолета с помощью приборов определили, что животное ходит по окружности диаметром 8,5 метров. Каково же было их удивление, когда потом на фотографии они увидели цепочку следов медведя и диаметр этой траектории оказался равен 9 метров. При этом все измерения и расчеты были правильными. Предложите свое объяснение этого “парадокса”.

Решение. С помощью приборов и по фотографии измерялись разные вещи. Цепочка следов показывает радиус траектории медведя в системе отсчета, связанной с льдиной, а приборы спасателей — радиус траектории в системе отсчета, связанной с землей. Различие в данных показывает, что первая система отсчета движется относительно второй. Так как льдина находится в стоячей воде и ветер отсутствует, она начинает двигаться относительно земли, когда медведь по ней ходит. Когда он отталкивается лапами от поверхности льда, на льдину действует сила, которая приводит ее в движение. В результате и медведь и центр льдины в системе отсчета, связанной с землей, движутся по окружностям вокруг неподвижной точки — общего центра масс.

Различие результатов измерений будет тем больше, чем больше отношение массы медведя к массе льдины. Так как в нашем случае разница на порядок меньше радиуса траектории, можно сделать вывод о том, что льдина всего на один порядок тяжелее медведя.

Возможны и другие объяснения “парадокса”. Если они были обоснованы физическими законами, и было показано, что они могут приводить к указанным в условии отличиям в показаниях, решение оценивалось полным баллом.

Критерии оценок

Полное и правильное решение любой задачи оценивалось в 20 баллов.

Идейно верное решение с недочетами (вычислительные ошибки, небольшие недостатки в обоснованиях) оценивались в 15 баллов.

Решения, содержащие верный ход рассуждений, значительные продвижения, но не приведшие к правильному ответу из-за существенных ошибок, оценивались в 5 баллов.

Засчитывался результат 5 лучших задач.