Решения задач варианта 191. Ответы ко всем вариантам.

1. Трактор тащит на полозьях очень длинную трубу. Гаврила прошел вдоль всей трубы с постоянной скоростью в направлении движения трактора и насчитал 210 шагов. Когда он пошел в обратном направлении с той же скоростью, количество шагов оказалось равным 100. Чему равна длина трубы, если шаг Гаврилы равен 80 см? Ответ округлите до ближайшего целого числа метров. Скорость трактора постоянна.

Ответ: 108 м. **Решение.** Пусть длина трубы равна x (метров), и за 1 шаг Гаврилы длиной a (м) труба перемещается на расстояние y (м). Тогда, если m и n – количество шагов Гаврилы в том и другом направлении, получаем два уравнения: $x=m(a-y)$, $x=n(a+y)$. Отсюда $\frac{x}{m}+\frac{x}{n}=2a$, и $x=\frac{2amn}{m+n}$. При данных числовых значениях получаем $x=\frac{2\times0,8\times210\times100}{210+100}$ $=\frac{3360}{31}\approx108,387$ (м).

Возможны и другие способы решения. Например: При тех же неизвестных, что выше, введем также скорость Гаврилы V (м/мин) и скорость трактора U (м/мин). Записав в том и другом случае время, получаем систему: $\begin{cases}\frac{x}{V-U}=\frac{am}{V},\\ \frac{x}{V+U}=\frac{an}{V}\end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}\frac{x}{am}=1-\frac{U}{V},\\ \frac{x}{bn}=1+\frac{U}{V}.\end{cases}$ Складывая, получаем тот же ответ $x=\frac{2amn}{m+n}$.

Ответ к варианту 192: 98 м. Комментарий. $\frac{1463}{15}\approx97,533$ (м).

Ответ к варианту 193: 89 м. Комментарий. $\frac{1152}{13}\approx88,615$ (м).

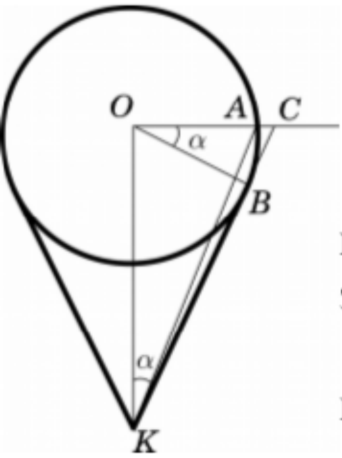
Ответ к варианту 194: 82 м. Комментарий. $\frac{1071}{13}\approx82,3846$ (м).

2. Маленький козленок привязан веревкой длиной 4, 7 м к колышку, расположенному на плоском лугу рядом со старым деревом. Ствол дерева имеет форму кругового цилиндра радиуса 0.5 м, причем кратчайшее расстояние от колышка до поверхности дерева равно 1 м.

Может ли козленок обойти вокруг дерева и подойти вплотную к колышку так, чтобы конец веревки совместился с ее началом? Ответ обоснуйте.

Считать, что веревка в натянутом положении находится в горизонтальной плоскости.

Ответ: нет. **Решение.** Когда козленок обойдет дерево и подойдет к колышку, веревка будет частично лежать на поверхности дерева, а оставшаяся часть будет состоять из двух прямолинейных отрезков. Минимальная необходимая длина равна сумме удвоенной длины отрезка касательной, проведенной от колышка к дереву и длины дуги между точками



касания (см. рис.). Пусть угол между касательными равен 2α, тогда

$$\sin\alpha = \frac{R}{R+d} = \frac{1}{3}.$$

При этом $L_{\min} = 2R\operatorname{ctg}\alpha + R(\pi + 2\alpha) = 2\sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{1}{3}$.

Это число примерно равно 4,739, но посчитать это и сделать сравнение с 4,7 без вычислительных средств довольно затруднительно.

Если заменить дугу AB и касательную BK на меньший по длине отрезок AK, то можно сделать такую оценку: $L_{\min} > L_{-} = \pi R + 2\sqrt{R^2 + (R+d)^2}$. В числах это даст

$L_{\min} > L_{-} = \frac{\pi}{2} + \sqrt{10} > \frac{3,14}{2} + 3,15 > 4,7$. Таким образом, веревки не хватит.

В вариантах 2 и 3 веревки хватает. Это доказывается с помощью другой замены: заменяем дугу AB и касательную BK на отрезок KC, который длиннее, так как $CB = R\cdot\operatorname{tg}\alpha > R\cdot\alpha$. Тогда

$L_{\min} < L_{+} = \pi R + \frac{2(R+d)^2}{\sqrt{d(2R+d)}}$. Например, в варианте 2 получаем $L_{\min} < L_{+} = \frac{\pi}{2} + \frac{9\sqrt{2}}{4}$

$< \frac{3,142}{2} + \frac{9\cdot 1,42}{4} < 4,8$.

Ответ к варианту 192: да.

Ответ к варианту 193: да.

Ответ к варианту 194: нет.

3. Для определения скорости течения широкой и бурной реки, Гаврила и Глафира поставили следующий эксперимент. В некоторой точке берега на расстоянии 100 м от моста они установили сирену, подающую звуковые сигналы через равные промежутки времени. Вторую такую же сирену взяла с собой Глафира, которая села на велосипед и расположилась на том же берегу в начале моста. Гаврила сел в моторную лодку, находящуюся у берега посередине между первой сиреной и началом моста. Экспериментаторы стартуют одновременно, скорость моторной лодки относительно воды, как и скорость велосипеда, равна 20 км/час и направлена перпендикулярно берегу. Оказалось, что звуковые сигналы от обеих сирен приходят к Гавриле одновременно. Определите скорость течения реки на расстоянии 62 м от берега. Берег реки прямолинейный, скорость течения в каждой точке направлена вдоль берега.

Ответ: 12,4 км/час = 3,44 м/с. **Решение.** Введем систему координат, ось x которой направлена вдоль берега, начало координат в точке старта Гаврилы. Сирена на берегу имеет координаты (L, 0), Глафира едет вдоль прямой $x = -L$ (в нашем случае L = 50 м). Так как экспериментаторы находятся на одинаковом расстоянии от берега, то равенство времен, которые нужны для прохождения звукового сигнала, дает условие на координаты (x, y) Гаврилы:$x + L = \sqrt{(x - L)^2 + y\text{^}2}$.

Отсюда получаем $4xL = y^2$, что описывает параболу. Дифференцирование дает соотношение для скоростей: $4UL = 2yV$, где V и U соответственно скорость катера и скорость течения в данной точке. На расстоянии h от берега имеем $U = \frac{hV}{2L}$.

Ответ к варианту 192: 12,24 км/час = 3,4 м/с.

Ответ к варианту 193: 12,4 км/час = 3,44 м/с.

Ответ к варианту 194: 12,24 км/час = 3,4 м/с.

Задача 4

Вариант 191 Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изобарическое сжатие из состояния 1 в состояние 2, потом изохорический нагрев в состояние 3, цикл замыкается процессом 3-1, в котором давление есть линейная функция объема. Температуры в состояниях 1 и 3 одинаковы, давление в цикле изменяется в 2 раза. Определите кпд тепловой машины.

Решение. Параметры состояний таковы: (p_0, nv_0), (p_0, v_0), (np_0, v_0), $n = 2$. Работа газ за цикл $A = 1/2(n-1)^2 p_0 v_0$.

На участке $1-2$ тепло забирается из системы, на $2-3$ подводится $(3/2)(n-1)p_0v_0$. Необходимо найти на участке $3-1$ точку B, в которой прекращается теплоподвод. Уравнение процесса $3-1$: $p = np_0 - p_0(v - v_0)/v_0 = (n+1)p_0 - vp_0/v_0$, $T = pv/R = ((n+1)p_0v - v^2p_0/v_0)/R$. Найдем количество теплоты, которое получил газ при расширении от состояния 3 до объема v:

$$Q(v) = \frac{3}{2}\left((n+1)p_0v - \frac{p_0}{v_0}v^2 - np_0v_0\right) + \frac{1}{2}((n+1)p_0 - \frac{p_0}{v_0}v + np_0)(v - v_0) = \frac{5}{2}(n+1)p_0v - 2\frac{p_0}{v_0}v^2 - \frac{5n+1}{2}p_0v_0.$$

$Q(v)$ — квадратичная функция, имеющая максимум при $v = 5(n+1)v_0/8$. При $n \geq 5/3$ он лежит на отрезке $[v_0, nv_0]$. Таким образом, в рассматриваемом случае тепло, подведенное в систему, вычисляется по формуле:

$$Q_+ = \left[\frac{3}{2}(n-1) + \frac{(5n-3)^2}{32}\right] p_0v_0$$

Окончательно ответ:

$$\eta = \frac{16(n-1)^2}{48(n-1) + (5n-3)^2} = \frac{16}{97}$$

Ответ 16/97

Вариант 192 Одноатомный идеальный газ является рабочим телом тепловой машины. Сначала происходит изобарическое расширение из состояния 1 в состояние 2, потом изохорическое охлаждение в состояние 3, цикл замыкается процессом 3-1, в котором давление есть линейная функция объема. Температуры в состояниях 1 и 3 одинаковы, давление в цикле изменяется в 2 раза. Определите кпд тепловой машины.

Решение. Параметры состояний таковы: (np_0, v_0), (np_0, nv_0), (p_0, nv_0), $n = 2$. Работа газ за цикл $A = 1/2(n-1)^2 p_0v_0$.

На участке $1-2$ подводится тепло в систему в количестве $5/2(n-1)np_0v_0$, на $2-3$ тепло отводится. Необходимо найти на участке $3-1$ точку B, в которой начинается теплоподвод. Уравнение процесса $3-1$: $p = np_0 - p_0(v - v_0)/v_0 = (n+1)p_0 - vp_0/v_0$, $T = pv/R = ((n+1)p_0v - v^2p_0/v_0)/R$. Найдем количество теплоты, которое получил газ при сжатии от состояния 3 до объема v:

$$Q(v) = \frac{3}{2}\left((n+1)p_0v - \frac{p_0}{v_0}v^2 - np_0v_0\right) + \frac{1}{2}((n+1)p_0 - \frac{p_0}{v_0}v + p_0)(v - nv_0) = \frac{5}{2}(n+1)p_0v - 2\frac{p_0}{v_0}v^2 - \frac{n(n+5)}{2}p_0v_0.$$

$Q(v)$ — квадратичная функция, имеющая максимум при $v_1 = 5(n+1)v_0/8$. При $n \geq 5/3$ он лежит на отрезке $[v_0, nv_0]$, так как $Q(nv_0) = 0$, тепло подается в систему при $v_1 \leq v \leq nv_0$. Таким образом, в рассматриваемом случае тепло, подведенное в систему, вычисляется по формуле:

$$Q_+ = \left[\frac{5}{2}(n-1) + \frac{(3n-5)^2}{32}\right] p_0v_0$$

Окончательно ответ:

$$\eta = \frac{16(n-1)^2}{80n(n-1) + (3n-5)^2} = \frac{16}{161}$$

Ответ 16/161

Вариант 3 Аналогично 191 **Ответ** 4/15

Вариант 4 Аналогично 192 **Ответ** 4/31

5. Так как требуется, чтобы камень не задел заданный отрезок, искомый интервал скоростей имеет вид $v > v_0$. Назовем v_0 — минимальной скоростью.

Подбирая место броска и угол наклона начальной скорости к горизонту можно сделать так, чтобы траектрия проходила через две любые заданны точки, не лежащие на одной вертикали. Из закона сохранения энергии следует, что случаю минимальной скорости будет отвечать траектория, проходящая через оба угла здания.

Пусть камень, проходя через верхнюю часть здания имеет скорость v_1, направленную под углом β к горизонту. Геометрическое место точек, через которые проходят всевозможные траектории, описываются неравенством

$$y \leq \frac{v_1}{2g} - \frac{gx^2}{2v_1^2}$$

в системе координат с началом в верхней части здания и осями x y, направленными горизонтально в сторону уклона и вертикально (парабола безопасности).

Наименьшему значению v_1 соответствует случай

$$-l\mathrm{tg}\alpha = \frac{v_1}{2g} - \frac{gl^2}{2v_1^2}$$

При этом траектория проходит через две вершины здания и в силу выпуклости параболы не пересекает крышу. Отсюда

$$v_1^2 = gl\left(\sqrt{\mathrm{tg}^2\alpha + 1} - \mathrm{tg}\alpha\right) = gl\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

По закону сохранения энергии, минимальная скорость камня на поверхности земли составляет

$$v_0 = \sqrt{g\left(2H + l\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$$

Ответ $V > \sqrt{g\left(2H + l\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}$

6. В безветренный день белый медведь оказался на отколовшейся от айсберга небольшой льдине посреди стоячей воды. Спасатели с зависшего над льдиной вертолета отметили, что животное ходит по окружности диаметром 9,5 метров. Каково же было их удивление, когда потом на фотографии они увидели цепочку следов медведя и диаметр этой траектории оказался равен 10 метров. Оцените массу льдины, считая, что масса медведя 600 кг.

Ответ: 11,4 т. **Решение.** При наблюдении с вертолета был измерен диаметр траектории в системе отсчета, связанной с землей, а цепочка следов показывает диаметр траектории относительно льдины. Эти траектории не совпадают, так как льдина вместе с животным движутся относительно общего центра масс.

В силу закона сохранения импульса центр масс системы покоится. Расстояние от медведя до центра масс r определяется формулой

$$mr = M(R - r),$$

где R – расстояние от центра масс льдины до медведя, m – масса животного, а M – масса льдины.

Отсюда

$$M = \frac{mr}{R-r} = \frac{md}{D-d},$$

где D и d известные по условию диаметры цепочки следов и траектории медведя в неподвижной относительно земли системе отсчета. Подстановка чисел дает ответ 11400 кг.

Ответ к варианту 192: 9500 кг = 9,5 т.

Ответ к варианту 193: 9000 кг = 9 т.

Ответ к варианту 194: 7500 кг = 7,5 т.

Критерии оценки

Полное и правильное решение любой задачи оценивалось в 20 баллов.
Идейно верное решение, содержащее недочеты (вычислительные ошибки, небольшие недостатки в обоснованиях) оценивалось в 15 баллов.
Решение содержащее верный ход рассуждений, значительные продвижения, но не приведшие к правильному ответу из-за существенных ошибок, оценивались в 5 баллов

Засчитывался результат 5 лучших задач