Олимпиада «ЛОМОНОСОВ»

по механике и математическому моделированию – 2016/2017.

10 – 11 классы

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставилась также оценка 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

Решения задач варианта 171 и ответы к задачам других вариантов

1. Три спортсмена стартуют из одной точки замкнутой беговой дорожки длиной 400 м и бегут в одном направлении. Первый бежит со скоростью 155 м/мин., второй – 200 м/мин., третий – 275 м/мин. Через какое наименьшее время они все трое снова окажутся в одной точке? Сколько за это время произойдет обгонов (точку старта и точку финиша не считать)?

Ответ: $\frac{80}{3}$ минут = 26 мин. 40 сек.; 13 обгонов.

Решение. За минуту второй спортсмен опережает первого на 45 м. Значит, он снова поравняется с ним через $\frac{400}{45}=\frac{80}{9}$ минут, то есть встречи будут происходить через $\frac{80}{9}n$ минут ($n\in N$). Аналогично третий спортсмен за минуту опережает первого на 120 м и снова поравняется с ним через $\frac{400}{120}=\frac{80}{24}$ минут, встречи будут происходить через $\frac{80}{24}k$ минут ($k\in N$). Встречи второго и третьего спортсмена происходят в моменты времени $\frac{400}{75}m=\frac{80}{15}m$ ($m\in N$). Одновременно эти три события произойдут если $t=\frac{80}{9}n=\frac{80}{24}k=\frac{80}{15}m$. Первый раз это случится при $n=3$, $k=8$ и $m=5$ (это можно получить, например, решив уравнение $\frac{80}{9}n=\frac{80}{24}k$ $\Leftrightarrow$ $8n=3k$ $\Leftrightarrow$ $n=3q$, $k=8q$, $q\in Z$). Таким образом, $t=\frac{80}{3}$ мин.

За это время второй спортсмен обгонит первого 2 раза (при $n=1$ и $n=2$), третий первого – 7 раз, второй первого – 4 раза. Общее количество обгонов: $2+7+4=13$.

Ответ к варианту 172: $\frac{50}{3}$ минут = 16 мин. 40 сек.; 11 обгонов.

Ответ к варианту 173: $\frac{80}{3}$ минут = 26 мин. 40 сек.; 11 обгонов.

Ответ к варианту 174: 25 минут; 13 обгонов.

2. От квадратного стального листа со стороной 1 метр с четырёх углов отрезается по треугольнику так, что остаётся правильный восьмиугольник. Определите массу этого восьмиугольника, если толщина листа равна 3 мм, а плотность стали 7,8 г/см^3. Ответ дайте в килограммах, округлив при необходимости до ближайшего целого числа.

Ответ: $46{,}8\left(\sqrt{2}-1\right)\approx$ 19 кг.

Решение. Правильный восьмиугольник должен иметь равные углы и стороны. Поэтому отрезаются четыре равных треугольника с углами $45°$, $45°$ и $90°$. Если катеты этого треугольника равны x, то гипотенуза равна $x\sqrt{2}$ – это и будет сторона восьмиугольника. Поэтому длина стороны квадрата равна $2x+x\sqrt{2}$ и получается уравнение $2x+x\sqrt{2}=100$.

Отсюда $x=\dfrac{100}{2+\sqrt{2}}=50\left(2-\sqrt{2}\right)$ см, и площадь оставшегося восьмиугольника равна

$10000-4\cdot\dfrac{x^2}{2}$ $=10000-2\cdot2500\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)^2$ $=10000-5000\cdot\left(6-4\sqrt{2}\right)$ $=20000\left(\sqrt{2}-1\right)$ (см^2).

Значит, его объём равен $20000\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot0{,}3=6000\left(\sqrt{2}-1\right)$ (см^3), а масса равна $6000\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot7{,}8$ $=46800\left(\sqrt{2}-1\right)$ г, что составляет $46{,}8\left(\sqrt{2}-1\right)$ кг.

Округление до ближайшего целого можно проводить разными способами. Один из способов: так как $\sqrt{2}>1{,}4$, то масса больше 18,72. Так как $\sqrt{2}<1{,}415$ (доказывается возведением в квадрат), то масса меньше 19,422. Значит, ближайшее целое: 19 кг. Главное требование: доказательство должно быть основано на строгих оценках, а не на приближенных вычислениях без оценки точности. В случае необоснованного округления ставилась оценка 10 баллов. В случае неправильного ответа (независимо от причин) задача оценивалась в 0 баллов.

Ответ к варианту 172: $43{,}2\left(\sqrt{2}-1\right)\approx$ 18 кг.

Ответ к варианту 173: $31{,}2\left(\sqrt{2}-1\right)\approx$ 13 кг.

Ответ к варианту 174: $64{,}8\left(\sqrt{2}-1\right)\approx$ 27 кг.

3. В деревне, где живет Глафира, есть небольшой пруд, который наполняется бьющими на дне ключами. Пытливая Глафира выяснила, что стадо из 17 коров полностью выпило этот пруд за 3 дня. Через какое-то время ключи снова наполнили пруд, после чего 2 коровы выпили его за 30 дней. За сколько дней может выпить этот пруд одна корова?

Ответ: За 75 дней.

Решение. Пусть пруд имеет объем a (условных единиц). Этими единицами могут быть литры, ведра, кубометры и т. д. Пусть одна корова выпивает в день b (условных единиц) воды, а ключи добавляют в день c (условных единиц) воды. Тогда первое условие задачи равносильно уравнению $a+3c=3\cdot 17b$, а второе – уравнению $a+30c=30\cdot 2b$. Получили систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Неизвестные отсюда найти нельзя, но можно установить зависимость между ними.

Вычитая из второго уравнения первое, получим $b=3c$. Подстановка в одно из уравнений дает $a=150c$.

Если одна корова выпивает пруд за x дней, то получаем $a+xc=xb$, то есть $x=\dfrac{a}{b-c}=75$ дней.

Ответ к варианту 172: За 140 дней.

Ответ к варианту 173: За 80 дней.

Ответ к варианту 174: За 150 дней.

4. В двух одинаковых цилиндрах, закрытых легкими поршнями, содержится одинаковое количество газов: в одном –азот, в другом – водяной пар. Оба цилиндра поддерживаются при неизменной температуре $100°$С. В начальный момент времени давление газа в обоих цилиндрах 0,5 атм, объем 2 л, расстояние от дна до поршня 1 м. Поршни вдвигают в цилиндры с постоянной скоростью 10 см/мин в течение 7,5 минут. Определите отношение мощностей внешних сил, приложенных к поршням в конце движения. Был ли такой промежуток времени продолжительностью 30 с, что хотя бы одна внешняя сила совершила работу больше 15 Дж?

Ответ: 2; Да.

Решение. Рассмотрим изотермическое сжатие азота. Так как отношение объемов газа в начале и конце движения $l/(l-ut)=\alpha=4$, то давление азота составит $p=\alpha p_0=2$ атм. Водяной пар не может находиться под таким давлением при указанной температуре, поэтому при достижении давления насыщенного пара начнется конденсация, и в цилиндре с водяным паром будет постоянное давление $p_v = 1$ атм.

Силы, приложенные к поршням, пропорциональны давлениям, скорости движения поршней одинаковы, поэтому отношение мощностей равно $p/p_v = 2$.

За $\tau = 30$ с объем изменяется на 10^{-4} м^3. Давление водяного пара не превосходит 10^5 Па, так что работа силы, толкающей поршень в пар, не превосходит 10 Дж.

Вычислим среднее давление, необходимое для совершения заданной работы по сжатию азота:

$$A = p_a S v\tau = p_a \frac{V}{l_0} u\tau, \quad p_a = \frac{Al_0}{Vu\tau} = 1{,}5 \text{ атм.}$$

При этом давление в цилиндре за промежуток времени τ до конца сжатия равно $p_1 = \dfrac{p_0 l_0}{l_0 - u(t - tau)} = \dfrac{5}{3}$ атм. Так как за последний промежуток времени τ давление было почти всегда больше p_1, совершенная работа больше заданной.

Ответ к варианту 172: 3; Нет.

Ответ к варианту 173: 2; Да.

Ответ к варианту 174: 4; Нет.

5. Гаврила путешествовал по Африке. В солнечный ветреный день, в полдень, когда лучи от Солнца падали вертикально, мальчик бросил мяч из-за головы со скоростью 5 м/с против ветра под углом к горизонту. Через 1 с мяч попал ему в живот на 1 м ниже точки броска. Определите, на какое наибольшее расстояние удалялась от ног Гаврилы тень мяча. Сила, действующая на мяч со стороны воздуха, направлена горизонтально и не зависит от положения и скорости. Ускорение свободного падения g равно 10 м/с^2.

Ответ: на 75 см.

Решение. На тело, помимо силы тяжести, действует постоянная горизонтальная сила $F = m \cdot a$, направленная навстречу. В системе координат с началом в точке броска, горизонтальной осью x и вертикальной осью y закон движения имеет вид:

$$x(t) = V \cdot \cos\alpha \cdot t - \frac{at^2}{2},$$

$$y(t) = V \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Из условия известны координаты точки в момент времени τ:

$$0 = V \cdot \cos\alpha \cdot \tau - \frac{a\tau^2}{2},$$

$$-H = V \cdot \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Из этой системы двух уравнений с двумя неизвестными находим ускорение, которое создает сила, действующая со стороны воздуха, и угол, под которым произведен бросок. Из второго уравнения: $\sin\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau}\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{10\cdot 1}{2} - \frac{1}{1}\right) = \frac{4}{5}$. Поэтому $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, и из первого уравнения: $a = \frac{2V \cdot \cos\alpha}{\tau} = \frac{2\cdot 5\cdot 3}{5\cdot 1} = 6$ м/с^2.

Наибольшее удаление тени соответствует максимальному значению *x*, которое достигается при $t = \frac{V\cos\alpha}{a}$ (вершина параболы). Это значение равно $L = \frac{V^2\cos^2\alpha}{2a}$ $= \frac{5^2\cdot 3^2}{5^2\cdot 2\cdot 6} = \frac{3}{4}$ м.

Для справки: ответ в общем виде $L = \frac{\tau}{4}\sqrt{V^2 - \left(\frac{g\tau}{2} - \frac{H}{\tau}\right)^2}$ (в вариантах 171 и 173), $L = \frac{\tau}{4}\sqrt{V^2 - \left(\frac{g\tau}{2} + \frac{H}{\tau}\right)^2}$ (в вариантах 172 и 173).

Ответ к варианту 172: на 1,6 метра.

Ответ к варианту 173: на 60 см.

Ответ к варианту 174: на 2 метра.

6. Для подъема груз прицепляют к крюку подъемного крана с помощью строп, изготовленных из стального каната. Расчетная масса груза равна $M = 20$ т, количество строп $n = 3$. Каждая стропа образует угол $\alpha = 30°$ с вертикалью. Все стропы несут одинаковую нагрузку при подъеме груза. По требованиям техники безопасности прочность каната на разрыв должна в $k = 6$ раз превышать расчетную нагрузку. Канат состоит из очень большого числа стальных ниточек, каждая из которых выдерживает предельную нагрузку $q = 10^3$ Н/мм^2. Укажите наименьший диаметр каната, из которого можно изготовить стропы, если в ассортименте имеются канаты диаметром с любым целым числом миллиметров. Ускорение свободного падения g считать равным 10 м/с^2.

Ответ: 26 мм.

Решение. На каждое из n нижних креплений строп приходится сила веса груза $\frac{P}{n}$. Тогда сила натяжения стропы будет равна $N = \frac{P}{n \cdot \cos\alpha}$. Значит, прочность каната должна быть $Q \geq kT = \frac{kP}{n \cdot \cos\alpha}$.

Так как прочность каната Q определяется площадью сечения всех ниток S и прочностью каждой нитки q ($Q = S \cdot q$), то $Sq \geq \frac{kP}{n \cdot \cos\alpha} \Rightarrow S \geq \frac{kP}{nq \cdot \cos\alpha}$.

Установим связь между площадью сечения всех ниток S и площадью сечения каната A, считая количество ниток очень большим.

Замостим поперечное сечение каната шестиугольниками, площадью S_6, в которые впишем круги, площадью S_0. Тогда $\frac{A}{S} = \frac{S_6}{S_0} = \frac{6 \cdot 0,5R \cdot 2R}{\pi R^2 \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$.

И для диаметра каната D получим

$$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{kP}{nq \cdot \cos\alpha} \Rightarrow D = \frac{2}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{3} \cdot kMg}{nq \cdot \cos\alpha}}.$$

Подстановка числовых данных дает $D = \frac{80}{\pi}$. Так как это число между 25 и 26, то наименьший диаметр каната равен 26 мм.

Ответ к варианту 172: 13 мм.

Ответ к варианту 173: 26 мм.

Ответ к варианту 174: 13 мм.