Решение.

1. В осях координат зависимости скорости от времени получается трапеция с основаниями V и U. Так как пройденный путь — это площадь под графиком скорости, то задача сводится к нахождению параллельного основаниям трапеции отрезка, который делит площадь в отношении $1:2(1:k)$. Искомая скорость получается равной

$$W = \frac{V^2 + kU^2}{1+k}$$

. Ответ: $\{= \sqrt{33} \approx 5,74\}$

2. Если обозначить через a расстояние от Гаврилы до точки, расположенной под фонарем, а через x — длину его тени, то получим из простых геометрических соображений: $\frac{x}{x+a} = h/H$, где h и H — высота Гаврилы и высота, на которой висит фонарь, соответственно. Отсюда находим длину тени: $\frac{ah}{H-h}$. Поэтому $\dot{x} = \frac{\dot{a}h}{H-h} = \frac{1{,}3 \cdot 1{,}6}{3{,}0-1{,}6} = 1,49$ (м/с). Здесь точками обозначается производная по времени, то есть скорость.

3. При горизонтальном выстреле с учетом горизонтальной силы сопротивления F воздуха закон движения снаряда массой m можно записать в форме:

$$\begin{cases} x = Vt - at^2/2, \\ y = h - gt^2/2. \end{cases}$$

Откуда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} L = \alpha L_0 = Vt - at^2/2, \\ 0 = h - gt^2/2. \end{cases}$$

Здесь L_0 — расстояние до цели, $0 < \alpha < 1$. Время в полете выражается формулой $t = \sqrt{2h/g}$, а расстояние по горизонтали $L = V\sqrt{2h/g} - kh$, где $k = a/g$ и $a = F/m$. В последнем уравнении первый член определяет дальность полета без учета силы сопротивления. То есть $L_0 = V\sqrt{2h/g}$. Тогда можно найти k: $kh = L_0(1-\alpha)$

Для попадания в цель необходимо поднять пушку на некоторую высоту h_1, такую что будет выполняться соотношение: $L_0 = V\sqrt{2h_1/g} - kh_1$ или $L_0 = V\sqrt{2h/g} \cdot x - kh \cdot x^2 \Rightarrow L_0 = L_0 \cdot x - L_0(1-\alpha) \cdot x^2$, где $x = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$ — искомая величина.

Полученное уравнение имеет единственное решение $x = 2$, поэтому высоту плиты надо увеличить в $x^2 = 4$ раза.

4. Весь промежуток времени между $14:00$ и $17:30$ составляет 210 минут. Отложим на оси x на отрезке от 0 до 210 минут момент появления Гаврилы, а на оси y на отрезке от 0 до 210 минут — момент появления Глафиры. Тогда координаты любой точки внутри квадрата размерами 210×210 соответствуют какой-то возможной ситуации. Если Гаврила приходит в момент времени x, то они встретятся, если Глафира пришла между моментами времени $x - 30$ и $x + 30$. Это означает, что точки, расположенные внутри данного квадрата между прямыми $y = x - 30$ и $y = x + 30$, соответствуют ситуациям, когда встреча происходит. Искомая вероятность равна отношению площади части квадрата, заключенной между параллельными диагонали квадрата прямыми $y = x \pm 30$, ко всей площади квадрата. Она равняется:

$$\frac{210 \cdot 210 - 2 \cdot \frac{180 \cdot 180}{2}}{210 \cdot 210} = 1 - \frac{18^2}{21^2} = 1 - \frac{36}{49} = \frac{13}{49} = 0,2653...$$

5. Так как перегородка проницаема для водорода, то он займет весь объем сосуда. На положение перегородки распределение водорода не влияет.

В правой части сосуда образуется водяной пар и вода. Давление насыщенного пара при температуре $100°C$ равно атмосферному давлению P_0. Из закона М-К видно, что

72 грамма насыщенного водяного пара занимают объем $V = \frac{mRT}{\mu P_0} = 122,4$ дм^3. Это больше, чем всего сосуда. Значит, вода вся не испарится. И давление водяного пара будет атмосферным. Оно должно быть равно давлению азота. Находим объем азот $V_A = \frac{\nu RT}{P_0} \approx 62$ дм^3.

Решение.

1. Если было израсходовано x килограмм желтой краски, то белой будет $0,8x$, а зеленой — $1,2x$. Поэтому $3x = 16$, и $x = \frac{16}{3}$. Значит, зеленой краски нужно $1,2x = 6,4$(кг).

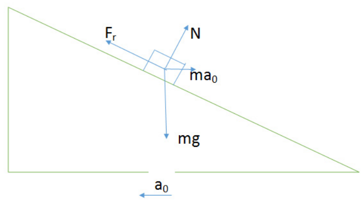
Ответ: $\{= 6,4\}$

2. Через время τ нижний конец лестницы отойдет от угла расстояние $x = a\tau^2/2$ и приобретет скорость $v_1 = a\tau$. При этом лестница будет наклонена под углом α к вертикали: $\sin\alpha = a\tau^2/(2l)$. Так как длина лестницы неизменна, проекции скоростей ее концов на направление лестницы одинаковы. Обозначая скорость верхнего конца через v_2, получаем $v_1 \sin\alpha = v_2 \cos\alpha$, откуда

$$v_2 = v_1 \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a^2\tau^3}{\sqrt{4l^2 - a^2\tau^4}}.$$

Ответ: $a^2\tau^3/\sqrt{4l^2 - a^2\tau^4}$

3. Из условия задачи следует, что коэффициент трения между бруском и наклонной



плоскостью равен $\mu = \mathrm{tg}\,\alpha_0 = \frac{1}{2}$.

Предположим, что наклонная плоскость движется с ускорением a_0. Тогда в системе отсчета, связанной с наклонной плоскостью, законы Ньютона не выполняются. Для того, чтобы воспользоваться законами Ньютона, следует ввести в рассмотрение фиктивную силу инерции величиной ma_0, которая направлена горизонтально в противоположную сторону от ускорения a_0.

В этом случае предельному равновесию бруска на наклонной плоскости будет соответствовать следующая система уравнений:

$$\begin{cases} N = mg\cos\alpha - ma_0\sin\alpha \\ mg\sin\alpha + ma_0\cos\alpha = F_r \\ F_r = \mu N \end{cases}$$

Отсюда следует ответ:
$a = g\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_0 - \mathrm{tg}\,\alpha_1}{1 + \mathrm{tg}\,\alpha_0 \cdot \mathrm{tg}\,\alpha_1} = \frac{g}{12} \approx 0,83$

4. Если ввести неизвестные и составить систему уравнений, получается система, в которой количество неизвестных больше, чем количество уравнений. Eҷ решение довольно громоздко. Поэтому лучше рассуждать иначе. Катер относительно плота движется с одной и той же скоростью, поэтому 1 час от момента обгона плота до момента встречи с плотом разделится поровну: 30 минут катер плыл от плота до деревни и 30 минут — от деревни к плоту. Значит, катер потратил на путь от Энска до Безымянной минут. Если катер потратил на путь от старта до обгона плота 10 минут, а плот на этот же путь потратил $50 + 10 = 60$ минут, то скорость катера по течению в 6 раз больше скорости плота. Значит, плот потратит на путь от Энска до Безымянной в 6 раз больше времени, то есть 240 минут.

5. После подъема стакана весь его внутренний объем будет заполнен жидкостью (при этом давление в жидкости, находящейся выше внешнего уровня воды, будет ниже атмосферного). Если стакан и всю находящуюся в нем жидкость мысленно заменить твердым телом, то равновесие окружающей жидкости не изменится, поэтому искомая

сила равна силе, с которой нужно удерживать твердый цилиндр, погруженный в воду на три четверти, масса которого равна сумме масс стакана m и помещающейся в него жидкости ρV. Учитывая силу Архимеда, получим силу $mg+\rho gV-{}^3\!/_4\,\rho gV = mg+{}^1\!/_4\,\rho gV$.