



# **МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ**

*олимпиады школьников  
«ЛОМОНОСОВ»  
по механике и математическому  
моделированию*

2015/2016 учебный год

9 класс. Решения задач

1. Автомобиль двигался со скоростью  $V$ . При въезде в город водитель уменьшил скорость на  $x\%$ , а при выезде из города увеличил её на  $0,5x\%$ . Оказалось, что эта новая скорость на  $0,6x\%$  меньше скорости  $V$ .

А) Можно ли найти величину  $x$ ? Если можно, чему она равна?

Б) Можно ли найти величину  $V$ ? Если можно, чему она равна?

**Ответ:** а) Можно; 20; б) нет. **Решения.**

А) Условие задачи означает, что выполнено уравнение

$$V \left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 + \frac{0,5x}{100}\right) = V \left(1 - \frac{0,6x}{100}\right) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x}{100}\right) \left(1 + \frac{x}{200}\right) = 1 - \frac{3x}{500} \Leftrightarrow \frac{x^2}{20000} = \frac{3x}{500} - \frac{x}{200}$$

$\Leftrightarrow x=0$ ;  $x=20$ . Значение  $x=0$  противоречит условию. Значит,  $x=20$ .

Б) Любое положительное число  $V$  удовлетворяет условию.

2. В сосуде с водой на дне расположен куб из материала, плотность которого  $\rho_1$  в 3 раза превышает плотность воды  $\rho_0$ . С каким ускорением и в каком направлении надо начать перемещать сосуд, чтобы куб стал всплывать?

**Ответ:** не меньше, чем  $g$  вниз. **Решение.** Если ускорение сосуда больше или равно  $g$ , то давление столба на верхнюю поверхность куба отсутствует. Так как сила реакции сосуда направлена вверх или равна нулю, ускорение куба относительно земли не превосходит  $g$ , при этом относительное ускорение будет направлено вверх, то есть куб начнет всплывать.

3. Туристы из США, приезжая в Европу, для перевода температуры в градусах Цельсия  $C$  в привычные для них градусы Фаренгейта  $F$  нередко используют приближённую формулу перевода:  $F=2C+30$ . Укажите диапазон температур (в градусах Цельсия), при которых отклонение температуры в градусах Фаренгейта, полученной по указанной приближённой формуле, от температуры, полученной по точной формуле, не превышает 5%. Для получения точной формулы следует знать, что вода замерзает при  $32F$ , а кипит при  $212F$ .

**Ответ:**  $1\frac{11}{29} \leq C \leq 32\frac{8}{11}$ . **Решение.** Обе шкалы температур равномерны, поэтому они связа-

ны линейным законом:  $F=kC+b$ . Из условия определяются константы  $a$  и  $b$ . Получается точная

формула:  $F = \frac{9}{5}C + 32$ .

Отклонение температур, посчитанных по двум формулам, равно:

$$\frac{(2C+30) - (\frac{9}{5}C+32)}{\frac{9}{5}C+32} = \frac{C-10}{9C+160}$$

По условию:  $-\frac{5}{100} \leq \frac{C-10}{9C+160} \leq \frac{5}{100}$ . Отсюда:  $\frac{40}{10029} \leq C \leq \frac{360}{11}$ . Это означает, что в диапазоне температур примерно от 1 до 33 градусов Цельсия использование приближённой формулы вполне оправдано (ведь делать перевод градусов по ней гораздо удобнее, чем по точной формуле).

4. На берегах имеющего форму круга (вид сверху) острова расположены города  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . Прямойлинейная асфальтовая дорога  $AC$  делит остров на две равные половины. Прямойлинейная асфальтовая дорога  $BD$  короче дороги  $AC$  и пересекает её. Скорость велосипедиста на любой асфальтовой дороге равна 15 км/час. На острове имеются также прямойлинейные грунтовые дороги  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$ , скорость велосипедиста на которых одинакова. Велосипедист доезжает из пункта  $B$  до каждого из пунктов  $A$ ,  $C$  и  $D$  по прямойлинейной дороге за 2 часа. Найдите площадь, ограниченную четырёхугольником  $ABCD$ .

**Ответ:** 450 кв. км. **Решение.** Условие задачи означает, что дан четырёхугольник  $ABCD$ , у которого углы  $B$  и  $D$  – прямые (опираются на диаметр),  $AB=BC$  (обе дороги грунтовые, и велосипедист проезжает их за одинаковое время),  $BD = 15 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot 2 \text{ час} = 30 \text{ км}$ . Опустим из точки  $B$  два перпендикуляра:  $BM$  – на прямую  $AD$ , и  $BN$  – на прямую  $CD$ . Тогда  $\triangle BMA = \triangle BNC$  (оба прямоугольные, гипотенузы равны,  $\angle BNC = \angle BAM$  – каждый из этих углов в сумме с  $\angle BAD$  даёт  $180^\circ$ ). Поэтому четырёхугольник  $MBND$  равновелик четырёхугольнику  $ABCD$ . При этом  $MBND$  – квадрат, у которого известна диагональ  $BD$ . Поэтому его площадь равна  $\frac{30^2}{2} = 450$  кв. км.

5. В два самовара – большой и маленький – налили очень горячую воду одинаковой температуры. Оба самовара имеют одну и ту же форму и сделаны из одинакового материала. Какой из них раньше остынет до комнатной температуры?

**Ответ:** маленький. **Решение.** Если один самовар в  $n$  раз больше другого, то его объём больше в  $n^3$  раз, а площадь поверхности больше в  $n^2$  раз. Поэтому на единицу поверхности в большом самоваре приходится в  $n$  раз больший объём. Значит, он будет остывать медленней.