МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию

2015/2016 учебный год

Решения задач варианта 161 и ответы к задачам других вариантов

Критерии оценок задач:

Каждая задача оценивается в 20 баллов. Оценка 20 баллов ставится за правильное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности, вычислительные ошибки) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставилась также оценка 10 баллов за частичное продвижение в решении.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

1. Расстояние от лежащей в горизонтальной плоскости точки до основания телевизионной башни равно 100 м. При этом из данной точки башня видна (от основания до верхушки) под углом $46°$. Без использования таблиц, калькулятора и других вычислительных устройств определите, что больше: высота башни или 103,3 м?

Ответ: Высота башни больше. **Решение.** Высота башни равна $H=100\cdot\mathrm{tg}46°$ $=100\cdot\mathrm{tg}\left(45°+1°\right)$ $=100\dfrac{\mathrm{tg}45°+\mathrm{tg}1°}{1-\mathrm{tg}45°\cdot\mathrm{tg}1°}$ $=100\dfrac{1+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}{1-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}$. Так как при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\mathrm{tg}x>x$, а также так как $\pi>3$, то $H>100\dfrac{1+\dfrac{\pi}{180}}{1-\dfrac{\pi}{180}}$ $=100\dfrac{180+\pi}{180-\pi}$ $>100\dfrac{180+3}{180-3}=\dfrac{6100}{59}>103,3$. Можно было дать и более точную оценку (так как $\pi>3,14$): $H>100\dfrac{180+\pi}{180-\pi}>100\dfrac{180+3,14}{180-3,14}>103,55$.

Приведенное выше решение абсолютно строгое и не использует приближенных вычислений. Возможен также примерный подсчет высоты башни: так как при малых углах $\mathrm{tg}x\approx x$, то $H=100\cdot\mathrm{tg}46°$ $=100\dfrac{1+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}{1-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{180}}$ $\approx100\dfrac{1+\dfrac{\pi}{180}}{1-\dfrac{\pi}{180}}$ $=100\dfrac{180+\pi}{180-\pi}$ $\approx100\dfrac{180+3,14}{180-3,14}\approx103,55$ м. Это довольно точный результат (вычисление по таблицам дает $100\cdot\mathrm{tg}46°\approx103,5530$), но такое решение нельзя признать безупречным, если не делается оценка точности вычислений.

Ответ к варианту 162: 193,5 м больше.

Ответ к варианту 163: высота башни больше.

Ответ к варианту 164: 96,8 м больше.

2. На берегах имеющего форму круга (вид сверху) острова расположены города *A, B, C* и *D*. Прямолинейная асфальтовая дорога *AC* делит остров на две равные половины. Прямолинейная асфальтовая дорога *BD* короче дороги *AC* и пересекает её. Скорость велосипедиста на любой асфальтовой дороге равна 15 км/час. На острове имеются также прямолинейные грунтовые дороги *AB, BC, CD* и *AD*, скорость велосипедиста на которых одинакова. Велосипедист доезжает из пункта *B* до каждого из пунктов *A, C* и *D* по прямолинейной дороге за 2 часа. Найдите площадь, ограниченную четырёхугольником *ABCD*.

Ответ: 450 кв. км. **Решение.** Условие задачи означает, что дан четырёхугольник *ABCD*, у которого углы *B* и *D* – прямые (опираются на диаметр), $AB = BC$ (обе дороги грунтовые, и велосипедист проезжает их за одинаковое время), $BD = 15\,\frac{\text{км}}{\text{час}}\cdot 2\text{ час} = 30$ км. Опустим из точки *B* два перпендикуляра: *BM* – на прямую *AD*, и *BN* – на прямую *CD*. Тогда $\Delta BMA = \Delta BNC$ (оба прямоугольные, гипотенузы равны, $\angle BCN = \angle BAM$ – каждый из этих углов в сумме с $\angle BAD$ даёт $180°$). Поэтому четырёхугольник *MBND* равновелик четырёхугольнику *ABCD*. При этом *MBND* – квадрат, у которого известна диагональ *BD*. Поэтому его площадь равна $\frac{30^2}{2} = 450$ кв. км.

Ответ к варианту 162: 800 кв. км.

Ответ к варианту 163: 200 кв. км.

Ответ к варианту 164: 50 кв. км.

3. Санная горка состоит из прямолинейного склона *AB* и горизонтального участка *BC*. Точка *A* находится на расстоянии 5 м от ближайшей к ней точки *H* горизонтальной земной поверхности. Расстояние *HC* равно 3 м, точка *B* лежит на отрезке *HC*. Найдите расстояние от точки *H* до точки *B*, чтобы время движения саней из состояния покоя по ломаной *ABC* было минимальным. Поле силы тяжести считать однородным, силой трения, сопротивлением воздуха и изменением модуля вектора скорости саней при прохождении точки сопряжения *B* пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ м. **Решение.** Пусть *S* – расстояние *HC, H* – расстояние *AH, x* – искомое расстояние. Тогда время падения $t_{AH} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, время спуска из точки *A* в точку *B* равно $t_{AB} = \frac{t_{AH}}{\sin\angle ABH}$, при этом $\sin\angle ABH = \frac{H}{\sqrt{H^2+x^2}}$, а скорость в точке *B* равна $V = \sqrt{2gH}$.

Поэтому время движения саней равняется: $t_{ABC} = t_{AB} + t_{BC} = \frac{2\sqrt{H^2+x^2}+S-x}{\sqrt{2gH}}$.

Требуется найти минимум функции $f(x) = 2\sqrt{H^2+x^2} - x$. Производная этой функции $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{H^2+x^2}} - 1$ равна 0, поэтому $2x = \sqrt{H^2+x^2} \Rightarrow 4x^2 = H^2+x^2 \Rightarrow x = \frac{H}{\sqrt{3}}$. Несложно показать, что это будет точка минимума. При $H = 5$ получаем: $x = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Ответ к варианту 162: $\sqrt{3}$ м.

Ответ к варианту 163: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ м.

Ответ к варианту 164: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ м.

4. Один моль одноатомного идеального газа совершает циклический процесс *abca*. Диаграмма этого процесса в осях *P – T* представляет собой криволинейный треугольник, сторона *ab* которого параллельна оси *T*, сторона *bc* – отрезок прямой, проходящей через начало координат, а сторона *ca* – дуга параболы, проходящей через начало координат, ось которой параллельна оси *T*. При этом в точках *a* и *c* температура газа одинакова и равна $T_0 = 320$ K, давление в точке *a* вдвое меньше давления в точке *c*. Определите работу, совершаемую газом за цикл.

Ответ: 664 Дж. **Решение**. Процесс *ab* – изобара, процесс *bc* – изохора, процесс *ca* описывается уравнением $T = P(d - kP)$, где *d, k* – некоторые константы. Несложно видеть, что в таком процессе объем оказывается линейной функцией давления, то есть в осях *PV* данный циклический процесс изображается прямоугольным треугольником с катетами *ab* и *bc*.

Пусть P_0, V_0 – параметры газа в точке *b*. Тогда параметры газа в точке *a*: $P_0, 2V_0$, в точке *c*: $2P_0, V_0$. Отсюда находим: $A = \frac{1}{2}P_0V_0 = \frac{1}{4}RT_0 = 664$ Дж.

Ответ к варианту 162: $\frac{2}{3}RT_0 \ =1662$ Дж.

Ответ к варианту 163: $\frac{2}{3}RT_0 \ =1994$ Дж.

Ответ к варианту 164: $\frac{1}{4}RT_0 \ =582$ Дж.

5. Для перемещения между пунктами, расположенными на расстоянии сотен километров на земной поверхности, люди будущего, вероятно, будут прокапывать прямолинейные туннели, в которых капсулы будут перемещаться без трения исключительно под действием силы притяжения Земли. Пусть точки *A, B* и *C* лежат на одном меридиане, расстояние от *A* до *B* по поверхности относится к расстоянию от *B* до *C* по поверхности как $m:n$. Капсула проходит по туннелю *AB* примерно за 42 минуты. Оцените время движения по туннелю *AC*. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 42 мин. **Решение**. Пусть точка *O* – центр Земли. Оценим время движения от *A* до *B*. Для этого рассмотрим треугольник *AOB*. Можно считать, что угол $\alpha = 90° - \angle ABO$ очень мал, так что $\sin\alpha \approx \alpha$. Так как точка в туннеле *AB* притягивается к центру силой тяготения *F*, то в проекции на направление движения получим силу $F\sin\alpha \approx F\alpha$. Под действием этой силы тело по каналу будет двигаться с ускорением $a \approx R\ddot{\alpha}$. Тогда модель движения точки от *A* до *B* можно рассматривать как модель математического маятника, для которого период не зависит от расстояния от *B* до *A*. Это значит, что время движения будет одинаковым.

Ответ к варианту 162: 42 мин.
Ответ к варианту 163: 42 мин.
Ответ к варианту 164: 42 мин.

6. Кинофильм на пленке нужно перемотать с одной катушки на другую. Диаметры пустых катушек одинаковы и равны *a*. Найдите время, необходимое для перемотки, если длина киноленты равна *L*, толщина кинопленки мала и равна *S*, а приемная катушка вращается с постоянной угловой скоростью ω.

Ответ: $T=\frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2+\frac{4SL}{\pi}}-a\right)$. **Решение**. За каждый оборот приемной катушки на нее наматывается 1 виток пленки, значит, радиус увеличивается на *S*. Один оборот катушка совершает за время $t_0=\frac{2\pi}{\omega}$. За время *t* катушка совершит $n=\frac{t}{t_0}$ оборотов, а значит, радиус увеличится на величину $\Delta r=S\cdot n$. То есть радиус приемной катушки меняется со временем по закону: $r(t)=\frac{a}{2}+\frac{S\omega}{2\pi}t$. Скорость *V* намотки пленки: $V=\omega\left(\frac{a}{2}+\frac{S\omega}{2\pi}t\right)$.

Таким образом, пленка движется равноускоренно, и время *T*, необходимое для прохождения всей пленки длиной *L*, будет определяться из уравнения: $\frac{L}{\omega}=\frac{S\omega}{4\pi}T^2+\frac{aT}{2}$.

В данном случае у уравнения один положительный корень, который и будет ответом к задаче:
$$T=\frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2+\frac{4SL}{\pi}}-a\right).$$

Ответ к варианту 162: $T=\frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2+\frac{4SL}{\pi}}-a\right)$.

Ответ к варианту 163: $T=\frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2+\frac{4SL}{\pi}}-a\right)$.

Ответ к варианту 164: $T=\frac{\pi}{S\omega}\left(\sqrt{a^2+\frac{4SL}{\pi}}-a\right)$.