



МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

*олимпиады школьников
«ЛОМОНОСОВ»
по механике и математическому
моделированию*

2015/2016 учебный год

Решение.

1. От длины маршрута S результат не зависит. Велосипедист затратит время $2S/V$, а турист в лодке — $S/(W - U) + S/(W + U)$. Приравниваем, сокращаем S и получаем квадратное уравнение для определения W : $W^2 - VW - U^2 = 0$. Положительный корень этого уравнения определяется формулой: $W = \frac{V + \sqrt{V^2 + (2U)^2}}{2}$. Данные подобраны так, что корень извлекается. Ответ: 12,5

2. Условия плавания бруска в первой и второй жидкости из условия задачи будут выглядеть следующим образом:

$$V\rho_0 = \frac{3}{4}V\rho_1 = \frac{1}{2}V\rho_2$$

Здесь ρ_0, ρ_1, ρ_2 — плотности бруска, первой и второй жидкостей соответственно; V — объем бруска. При смешивании равных масс двух жидкостей плотность смеси ρ равна среднему гармоническому плотностей компонент смеси:

$$\rho = \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

Тогда из условия плавания бруска в смеси $V\rho_0 = V'\rho$, выражая плотности из предыдущей формулы, для объема погруженной части бруска V' получим $V' = \frac{5}{8}V$. Ответ: $\frac{3}{8}$

3. Количество воды в бочке после k -го часа зависит от того, четное или нечетное K , и равно $V_{2n-1} = 10 + 4(n-1)$, $V_{2n} = 4n$. Так как первое переполнение может возникнуть только на нечетном часе, то условие $V > 49$ дает: $10 + 4(n-1) > 49$, то есть $n > \frac{43}{11}$. Значит $n = 11$ и $2n - 1 = 21$. Ответ: 21 час.

4. Можно потянуть за малое тело или за большое — будет два разных ответа. Потянем за большое. Общая масса равна 10 кг, значит ускорение будет равно $a = 10 \text{ м/с}^2$. Мысленно разрежем стержень по указанному сечению. Тогда пятая часть стержня вместе с большой массой будет двигаться с тем же ускорением, но под действием двух сил: $F = 100 \text{ Н}$, приложенной к тяжелому телу, и искомой силы T , приложенной к стержню: $F - T = (M + m_0/5)a$. Отсюда следует ответ 19,5 Н. Второй ответ: 80,5 Н

5. Если пересечь пару мячей с радиусами R_1 и R_2 вертикальной плоскостью проходящей через центры этих окружностей, то в плоскости их пересечения образуется трапеция, у которой основания — радиусы мячей, одна боковая сторона — сумма радиусов, другая, как раз и есть одна из сторон указанного в условии прямоугольного равнобедренного треугольника (пусть ее длина равна c). Из рассмотрения этой прямоугольной трапеции получим: $c = 2\sqrt{R_1R_2}$. Таким образом, радиусы можно найти из решения системы:

$$\begin{cases} 2\sqrt{R_1R_2} = \frac{225}{2}, \\ 2\sqrt{R_2R_3} = \frac{225}{2}, \\ 2\sqrt{R_1R_3} = 225. \end{cases} \quad \text{Отсюда получим: } R_2 = 7,5, R_1 = 15, R_3 = 30. \text{ Ответ } 7,5 \text{ см}$$

6. Видно, что средняя скорость на большом расстоянии составляет $200 \text{ км/ч} \approx 56 \text{ м/с}$, что много больше средней скорости на первом метре 2 м/с . Предположим, что при прохождении первого метра сила сопротивления не вносила существенного вклада. Тогда найдем ускорение свободного падения $g = 2 * h_1/\tau_1^2 = 8 \text{ м/с}^2$. При равноускоренном движении с таким ускорением средняя скорость всего спуска будет достигнута за 7 секунд, то есть почти все время спуска точка двигалась с практически неизменной скоростью. Она находится по формуле $V = \sqrt{mg/(kR^2)}$, где m — масса тела, а сила сопротивления выражается $F(v) = kR^2v^2$.

Итак, можно считать, что маленькое тело пройдет первый метр за то же, что и

большое, а установившуюся скорость найдем по формуле

$$V_2 = \sqrt{\frac{mg/4^3}{k \cdot R^2/4^2}} = \frac{V}{2}.$$

Таким образом, время спуска маленького тела составит 1 час.

Ответ 1 час



2015/2016 учебный год
КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ¹

олимпиады школьников
«ЛОМОНОСОВ»
по механике и математическому моделированию
10-11 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

От 97 баллов включительно и выше.

ПРИЗЁР:

От 50 баллов до 96 баллов включительно.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

От 90 баллов включительно и выше.

ПРИЗЁР (диплом II степени):

От 80 баллов до 894 баллов включительно.

ПРИЗЁР (диплом III степени):

От 65 баллов до 79 баллов включительно.

¹ Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по механике и математическому моделированию