

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2014/2015 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

Заочный этап 1

10-11 класс

В первых пяти задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). В шестой задаче требуется прислать решение в присоединенном файле. Ответом на каждую из первых пяти задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно  $10 \text{ м/с}^2$

абсолютный нуль температур равен  $-273^\circ\text{C}$ .

$\sqrt{2} = 1,4$ ,  $\sqrt{3} = 1,7$

::1.1:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдаль свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в два раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от брата к сестре и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала такое же расстояние, что прошли брат и сестра суммарно?

::1.2:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдаль свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в два раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от брата к сестре и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала расстояние в полтора раза большее чем то, которое прошли брат и сестра суммарно?

::1.3:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдаль свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в полтора раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от брата к сестре и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала такое же расстояние, что прошли брат и сестра суммарно?

::1.4:: Старший брат, выгуливая собаку, увидел вдаль свою младшую сестру, возвращающуюся из музыкальной школы. Дети пошли навстречу друг другу с постоянными скоростями так, что скорость брата в полтора раза больше, чем скорость сестры. Собака при этом радостно бегала от сестры к брату и обратно. Во сколько раз скорость собаки больше скорости брата, если от момента начала движения до момента встречи она пробежала расстояние в полтора раза больше чем то, которое прошли брат и сестра суммарно?

::2.1::Маленькому бруску придают начальную скорость  $V_0 = 4$  м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона  $\beta$  к горизонту таким, что  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$ . Через одну секунду после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту?

::2.2::Маленькому бруску придают начальную скорость  $V_0 = 2$  м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона  $\beta$  к горизонту таким, что  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{7}$ . Через четыре секунды после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту?

::2.3::Маленькому бруску придают начальную скорость  $V_0 = 3$  м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона  $\beta$  к горизонту таким, что  $\operatorname{tg} \beta = \frac{6}{17}$ . Через шесть секунд после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту?

::2.4::Маленькому бруску придают начальную скорость  $V_0 = 4$  м/с, и он начинает равномерно соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона  $\beta$  к горизонту таким, что  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{7}$ . Через четыре секунды после начала движения брусок оказывается у основания наклонной плоскости. За какое время брусок пройдет такое же расстояние, если ему придать ту же начальную скорость и эту же наклонную плоскость расположить под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту?

::3.1::При цене лотерейного билета 1000 рублей удалось продать 1000 билетов, то есть выручка составила 1 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 500 рублей, и выручка выросла в 1,5 раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

::3.2::При цене лотерейного билета 800 рублей удалось продать 10000 билетов, то есть выручка составила 8 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 400 рублей, и выручка выросла в 2,5 раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

::3.3::При цене лотерейного билета 200 рублей удалось продать 10000 билетов, то есть выручка составила 2 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 100 рублей, и выручка выросла в 1,5 раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

::3.4.: При цене лотерейного билета 400 рублей удалось продать 10000 билетов, то есть выручка составила 4 млн. рублей. В следующем тираже цену билета снизили до 200 рублей, и выручка выросла в 2,5 раза. Если принять линейную зависимость между ценой билета и количеством проданных билетов, то какой должна быть оптимальная цена за билет, при которой выручка будет максимально возможной? Ответ дайте в рублях, округлив его, если потребуется, до ближайшего целого значения.

::4.1.: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы  $M = 0,8$  кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью  $C = 500$  Дж/(кг·град), содержится 1 моль одноатомного газа при нормальном давлении  $P = 10^5$  Па и температуре  $T = 300$  К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью  $v = 80$  м/с шариком массы 200 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

::4.2.: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы  $M = 0,8$  кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью  $C = 300$  Дж/(кг·град), содержится 2 моля одноатомного газа при нормальном давлении  $P = 10^5$  Па и температуре  $T = 300$  К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью  $v = 90$  м/с шариком массы 200 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

::4.3.: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы  $M = 0,9$  кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью  $C = 428,5$  Дж/(кг·град), содержится 1 моль одноатомного газа при нормальном давлении  $P = 10^5$  Па и температуре  $T = 300$  К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью  $v = 420$  м/с шариком массы 100 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

::4.4.: В расположенном на гладкой горизонтальной поверхности сосуде массы  $M = 0,9$  кг, изготовленном из материала с удельной теплоемкостью  $C = 716,5$  Дж/(кг·град), содержится 1 моль одноатомного газа при нормальном давлении  $P = 10^5$  Па и температуре  $T = 300$  К, равной температуре сосуда. Этот сосуд подвергается абсолютно неупругому удару по одной из своих боковых граней летящим горизонтально со скоростью  $v = 180$  м/с шариком массы 100 г, изготовленным из того же материала. В результате такого взаимодействия сосуд приобретает горизонтальную скорость и движется поступательно вдоль линии движения шарика. Какую максимальную температуру (в градусах Кельвина) может приобрести газ в условиях такого испытания? Ответ округлите до целого числа градусов.

::5.1:: Материальная точка массы 110 г движется по плоскости под действием силы  $F$  по закону  $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2, \\ y(t) = 1 - 4t. \end{cases}$  Здесь координаты  $x, y$  — измеряются в метрах, время  $t$  — в секундах. Найдите величину работы силы  $F$  (в единицах СИ) за третью секунду движения.

::5.2:: Материальная точка массы 210 г движется по плоскости под действием силы  $F$  по закону  $\begin{cases} x(t) = t^2 + 2t, \\ y(t) = 1 + 12t. \end{cases}$  Здесь координаты  $x, y$  — измеряются в метрах, время  $t$  — в секундах. Найдите величину работы силы  $F$  (в единицах СИ) за вторую секунду движения.

::5.3:: Материальная точка массы 220 г движется по плоскости под действием силы  $F$  по закону  $\begin{cases} x(t) = 1 + 8t, \\ y(t) = 2t^2 - 3. \end{cases}$  Здесь координаты  $x, y$  — измеряются в метрах, время  $t$  — в секундах. Найдите величину работы силы  $F$  (в единицах СИ) за третью секунду движения.

::5.4:: Материальная точка массы 170 г движется по плоскости под действием силы  $F$  по закону  $\begin{cases} x(t) = 8t + 2, \\ y(t) = -2t^2 - 5t. \end{cases}$  Здесь координаты  $x, y$  — измеряются в метрах, время  $t$  — в секундах. Найдите величину работы силы  $F$  (в единицах СИ) за третью секунду движения.

::6.1:: Известно, что во время сильного ветра и шторма опасно, если корабль повернется к волне (ветру) бортом, а наиболее желательно ориентироваться носом к волне. Именно поэтому судно, потерявшее ход, рискует погибнуть. Что следует сделать капитану корабля, потерявшего ход, в условиях шторма в районе Марианской впадины, чтобы спасти корабль и сохранить его местоположение (чтобы ремонтная бригада могла найти его в том же месте).

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2014/2015 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

**Отборочный этап 2**

**10-11 класс**

В первых пяти задачах требуется дать только ответ (решение присылать не нужно). В шестой задаче требуется прислать решение в присоединенном файле. Ответом на каждую из первых пяти задач является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно  $10 \text{ м/с}^2$

атмосферное давление равно  $10^5 \text{ Па}$

::1.1:: Два автобуса курсируют между деревнями Аннино и Борино с заездом по пути в деревню Верино. Первый автобус вышел из Аннино, одновременно с ним из Борино вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Верино, сделали здесь остановку на 30 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Верино до Борино ехал 3,5 часа. Второй автобус от Верино до Аннино ехал 2,5 часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости второго автобуса к скорости первого.

::1.2:: Два автобуса курсируют между деревнями Андреево и Борисово с заездом по пути в деревню Виталино. Первый автобус вышел из Андреево, одновременно с ним из Борисово вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Виталино, сделали здесь остановку на 45 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Виталино до Борисово ехал 4,5 часа. Второй автобус от Виталино до Андреево ехал 3,5 часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости второго автобуса к скорости первого.

::1.3:: Два автобуса курсируют между деревнями Аннино и Борино с заездом по пути в деревню Верино. Первый автобус вышел из Аннино, одновременно с ним из Борино вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Верино, сделали здесь остановку на 50 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Верино до Борино ехал 3,5 часа. Второй автобус от Верино до Аннино ехал 2,5 часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости первого автобуса к скорости второго.

::1.4:: Два автобуса курсируют между деревнями Андреево и Борисово с заездом по пути в деревню Виталино. Первый автобус вышел из Андреево, одновременно с ним из Борисово вышел второй автобус. Они одновременно прибыли в Виталино, сделали здесь остановку на 20 минут и двинулись дальше. Первый автобус оставшийся отрезок пути от Виталино до Борисово ехал 4,5 часа. Второй автобус от Виталино до Андреево ехал 3,5 часа. Найдите отношение скоростей автобусов, считая скорость каждого автобуса во время движения постоянной. В ответ запишите отношение скорости первого автобуса к скорости второго.

::2.1::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 5 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.

::2.2::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 4 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.

::2.3::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 2 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.

::2.4::Металлический шар неподвижно лежит на горизонтальном дне сосуда. Сосуд заполнили жидкостью до уровня, едва покрывающего шар. Плотность жидкости в 6 раз меньше плотности материала шара. Определите, отношение минимальной силы давления шара на дно сосуда к начальному значению этой силы в сосуде без жидкости.

::3.1::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 12 тонн жидкости  $A$ , во второй — 17 тонн жидкости  $B$ , а в третьей — 15 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

::3.2::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 11 тонн жидкости  $A$ , во второй — 16 тонн жидкости  $B$ , а в третьей — 13 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

::3.3::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 18 тонн жидкости  $A$ , во второй — 23 тонн жидкости  $B$ , а в третьей — 20 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

::3.4::Три одинаковые цистерны полностью заполнены жидкостями. В первой цистерне содержится 17 тонн жидкости  $A$ , во второй — 22 тонн жидкости  $B$ , а в третьей — 19 тонн смеси этих двух жидкостей. Сколько жидкости  $A$  суммарно содержится во всех трех цистернах? Ответ дайте в тоннах, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

::4.1::При скоростном спуске лыжник массой 90 кг движется вниз по трассе с уклоном в  $45^\circ$ , испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости.

При скорости 1 м/с это сопротивление равно 0,6 Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен 0,1? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

::4.2::При скоростном спуске лыжник массой 100 кг движется вниз по трассе с уклоном в  $30^\circ$ , испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости. При скорости 1 м/с это сопротивление равно 0,5 Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен 0,1? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

::4.3::При скоростном спуске лыжник массой 100 кг движется вниз по трассе с уклоном в  $45^\circ$ , испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости. При скорости 1 м/с это сопротивление равно 0,5 Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен 0,1? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

::4.4::При скоростном спуске лыжник массой 80 кг движется вниз по трассе с уклоном в  $30^\circ$ , испытывая сопротивление воздуха, пропорциональное квадрату скорости. При скорости 1 м/с это сопротивление равно 0,6 Н. Какую наибольшую скорость мог бы развить лыжник, если коэффициент трения между лыжами и снегом равен 0,1? Ответ дайте в км/час, округлив его до ближайшего целого числа.

::5.1::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса  $P = 10$  кг, поступает переменное количество теплоты  $Q$ , меняющееся со временем по закону:  $q = \frac{q_0}{t_0} (t_0 - \sqrt{2t_0t - t^2})$ . Здесь  $q_0 = 110$  Дж,  $t_0 = 1$  с и  $t$  — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени  $t_1 = 0$  с до момента времени  $t_2 = 2$  с, если площадь поршня  $S = 1$  дм<sup>2</sup>. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

::5.2::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса  $P = 10$  кг, поступает переменное количество теплоты  $Q$ , меняющееся со временем по закону:  $q = \frac{q_0}{t_0} (t_0 - \sqrt{2t_0t - t^2})$ . Здесь  $q_0 = 110$  Дж,  $t_0 = 1$  с и  $t$  — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени  $t_1 = 0$  с до момента времени  $t_2 = 1$  с, если площадь поршня  $S = 1$  дм<sup>2</sup>. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

::5.3::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса  $P = 10$  кг, поступает переменное количество теплоты  $Q$ , меняющееся со временем по закону:  $q = \frac{q_0}{t_0} (t_0 - \sqrt{2t_0t - t^2})$ . Здесь  $q_0 = 110$  Дж,  $t_0 = 1$  с и  $t$  — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени  $t_1 = 1$  с до момента времени  $t_2 = 2$  с, если площадь поршня  $S = 1$  дм<sup>2</sup>. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

::5.4::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса  $P = 10$  кг, поступает переменное количество теплоты  $Q$ , меняющееся со временем по закону:  $q = \frac{q_0}{t_0} (t_0 + \sqrt{2t_0t - t^2})$ . Здесь  $q_0 = 110$  Дж,  $t_0 = 1$  с и  $t$  — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени  $t_1 = 0$  с до момента времени  $t_2 = 2$  с, если площадь поршня  $S = 1$  дм<sup>2</sup>. Ответ дайте в сантиметрах, округлив его до ближайшего целого числа.

::5.5::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса  $P = 10$  кг, поступает переменное количество теплоты  $Q$ , меняющееся со временем по закону:  $q = \frac{q_0}{t_0} (t_0 + \sqrt{2t_0t + t^2})$ . Здесь  $q_0 = 110$  Дж,  $t_0 = 1$  с и  $t$  — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени  $t_1 = 0$  с до момента времени  $t_2 = 2$  с, если площадь поршня  $S = 1$  дм<sup>2</sup>.

::5.6::В вертикальный цилиндрический сосуд с одним молем одноатомного идеального газа, закрытый сверху тяжелым поршнем веса  $P = 10$  кг, поступает переменное количество теплоты  $Q$ , меняющееся со временем по закону:  $q = \frac{q_0}{t_0} (t_0 + \sqrt{2t_0t + t^2})$ . Здесь  $q_0 = 110$  Дж,  $t_0 = 1$  с и  $t$  — время в секундах. Найдите перемещение поршня с момента времени  $t_1 = 1$  с до момента времени  $t_2 = 2$  с, если площадь поршня  $S = 1$  дм<sup>2</sup>.

::6.1::Часто бывает, что, промокнув под дождем, мы имеем ограниченное время для сушки белья. Предположим, что у нас есть 10 минут и в течение одной минуты мы можем воспользоваться феном, создавая тепловой поток на одежду. Как вы считаете, в каком случае одежда высохнет лучше: если сразу воспользоваться феном и потом 9 минут сушить естественным путем, или воспользоваться феном на последней минуте? А может быть, надо выждать несколько минут и потом воспользоваться феном, и оставшееся время опять сушить на воздухе?