

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию
Заключительный этап
Вариант 141

1. Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A , B и C . При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB , BC и AC , — прямые. Может ли расстояние между объектами A и B быть равным 24 км, если расстояние между B и C равно 12 км, а расстояние между A и C равно 20 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами A и B .

3. Хитрый волк, засевший в 20 метрах севернее и в 10 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$

где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x , x_0 , y , y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 12$ м/с, $b = 1$ м/с². Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 20 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с², а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{8}{33}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального объема к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $x(t)$, $t \geq 0$, $x(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через n секунд после начала движения (т.е. в момент $n + 1$ вспышки) оказалось, что $x(n) = nx(1)$.

а) При каких натуральных значениях n из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных n существует движение точки, отличное от описанного в пункте а)?

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию
Заключительный этап
Вариант 142

1. Приборы показали, что юго-восточный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за два часа пролететь в южном направлении вдоль меридиана 1200 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A , B и C . При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB , BC и AC , — прямые. Может ли расстояние между объектами A и B быть равным 10 км, если расстояние между B и C равно 12 км, а расстояние между A и C равно 16 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами A и B .

3. Хитрый волк, засевший в 10 метрах севернее и в 30 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$

где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x , x_0 , y , y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 9$ м/с, $b = 1$ м/с². Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 25 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с², а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{2}{7}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального давления к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $y(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через k секунд после начала движения (т.е. в момент $k + 1$ вспышки) оказалось, что $y(k) = ky(1)$.

а) При каких натуральных значениях k из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных k существует движение точки, отличное от описанного в пункте а)?

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию
Заключительный этап
Вариант 143

1. Приборы показали, что северо-западный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за два часа пролететь в южном направлении вдоль меридиана 1200 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A , B и C . При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB , BC и AC , — прямые. Может ли расстояние между объектами B и C быть равным 18 км, если расстояние между A и B равно 9 км, а расстояние между A и C равно 15 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами B и C .

3. Хитрый волк, засевший в 30 метрах севернее и в 20 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$

где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x , x_0 , y , y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 12$ м/с, $b = 1$ м/с². Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 15 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с², а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{8}{33}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального давления к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $x(t)$, $t \geq 0$, $x(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через n секунд после начала движения (т.е. в момент $n + 1$ вспышки) оказалось, что $x(n) = nx(1)$.

а) При каких натуральных значениях n из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных n существует движение точки, отличное от описанного в пункте а)?

Олимпиада школьников Ломоносов–2014
по механике и математическому моделированию
Заключительный этап
Вариант 144

1. Приборы показали, что северо-восточный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ (в км/ч), так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A , B и C . При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка AB , BC и AC , — прямые. Может ли расстояние между объектами B и C быть равным 13 км, если расстояние между A и B равно 15 км, а расстояние между A и C равно 20 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами B и C .

3. Хитрый волк, засевший в 10 метрах севернее и в 20 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t = 0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону:

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt^2, \end{cases}$$

где начало системы координат — могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y — на север, расстояния x , x_0 , y , y_0 измеряются в метрах, t — время в секундах, $a = 9$ м/с, $b = 1$ м/с². Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что масса санок 10 кг, ускорение свободного падения равно 10 м/с², а сила сопротивления движению пропорциональна второй степени скорости санок.

5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен $\frac{2}{7}$. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального объема к минимальному в этом цикле.

6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки. При анализе фотоснимков ввели координату точки $y(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = 0$ и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через k секунд после начала движения (т.е. в момент $k + 1$ вспышки) оказалось, что $y(k) = ky(1)$.

а) При каких натуральных значениях k из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных k существует движение точки, отличное от описанного в пункте а)?