

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года
по механике и математическому моделированию**

10 – 11 класс

Заочный этап, тур 3

Задачи и решения.

1.1. Эйфелева башня имеет высоту 324 м и весит 10000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 1,62 м?

Ответ: 1,25. **Решение.** Объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия. Так как коэффициент подобия равен $\frac{324}{1,62} = 200$, то данная копия Эйфелевой башни весит $\frac{10000}{200^3}$ тонн, что равно $\frac{10^7}{8 \cdot 10^6} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25$ кг.

1.2. Эйфелева башня имеет высоту 324 м и весит 10000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 129,6 см?

Ответ: 0,64.

1.3. Останкинская башня имеет высоту 540 м и весит 50000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 2,7 м?

Ответ: 6,25.

1.4. Останкинская башня имеет высоту 540 м и весит 50000 тонн. Сколько килограммов будет весить ее копия, имеющая высоту 216 см?

Ответ: 3,2.

2.1. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 1200 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1800 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 500. **Решение:** Обозначим V и U – скорости велосипедиста и поезда соответственно, h – длина поезда.

Тогда условия задачи на языке математики можно записать следующим образом:

$$(V - U)t_1 = h; \quad (V + U)t_2 = h; \quad U(t_1 + t_2) = l; \quad V(t_1 + t_2) = L.$$

Здесь t_1, t_2 – время движения велосипедиста по ходу поезда и навстречу соответственно.

Возьмем отношение последних двух уравнений. Отсюда следует, что скорость

велосипедиста в $a = \frac{L}{l} = 1,5$ раза больше скорости поезда. Из первых двух уравнений

выражаем время и подставляем в третье. Тогда для длины поезда получим формулу

$$h = \frac{l(\alpha^2 - 1)}{2\alpha} = 500.$$

2.2. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 800 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1000 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 180.

2.3. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 600 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1500 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 630.

2.4. За то время, в течение которого медленно движущийся товарный поезд преодолел 1200 м, школьник успел проехать на велосипеде вдоль железнодорожных путей из хвоста движущегося поезда в его начало и обратно к хвосту. При этом счетчик пройденного пути велосипеда показал, что велосипедист проехал 1600 м. Найдите длину поезда (в метрах).

Ответ: 350.

3.1. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 45, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 9. Решение. Если было n табуреток и m стульев, то ног в комнате $3n + 4m + 2 \cdot (n + m) + 2$, отсюда получаем $5n + 6m = 43$. Это уравнение в целых числах имеет решение $n = 5 - 6p$, $m = 3 + 5p$. Значения n и m одновременно положительны только при $p = 0$. Значит, было 5 табуреток и 3 стула. Поэтому людей в комнате: $5 + 3 +$ Гаврила.

3.2. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 52, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 10.

3.3. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 40, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 8.

3.4. Пришедшие в гости к Гавриле друзья заняли все находившиеся в комнате трёхногие табуретки и четырёхногие стулья, а самому Гавриле места не хватило. Гаврила посчитал, что ног в комнате оказалось 51, включая «ноги» табуреток и стульев, ноги пришедших гостей (по две у каждого!) и две ноги самого Гаврилы. Сколько людей было в комнате?

Ответ: 10.

4.1. Железнодорожный состав длиной $L = 600$ м, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона $\alpha = 30^\circ$ и останавливается, когда на горке находится ровно четверть состава. Какова была начальная скорость состава V (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/сек².

Ответ: 49. **Решение.** Кинетическая энергия поезда $\frac{mV^2}{2}$ будет равна потенциальной энергии той части поезда, которая въехала в горку $\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{4} \sin \alpha \cdot \frac{m}{4} g$.

$$\text{Тогда получим } V^2 = \frac{L}{4} \cdot \frac{1}{8} * (3,6)^2 = \frac{6000 * (3,6)^2}{32} = 9\sqrt{30}.$$

Так как верно следующее двойное неравенство $49 < 9\sqrt{30} < 49,5$ (проверяется возведением в квадрат), то ответ 49.

4.2. Железнодорожный состав длиной 700 м, двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона 30° и останавливается, когда на горке находится ровно четверть состава. Какова была начальная скорость состава (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее

к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2 .

Ответ: 53.

4.3. Железнодорожный состав длиной 600 м , двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона 30° и останавливается, когда на горке находится ровно треть состава. Какова была начальная скорость состава (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2 .

Ответ: 66.

4.4. Железнодорожный состав длиной 800 м , двигаясь по инерции, въезжает на горку с углом наклона 30° и останавливается, когда на горке находится ровно четверть состава. Какова была начальная скорость состава (в км/час)? В качестве ответа приведите ближайшее к величине найденной скорости целое число. Трение не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2 .

Ответ: 57.

5.1. Граната, лежащая на земле, разрывается на множество мелких одинаковых осколков, которые разлетаются в радиусе $L = 90 \text{ м}$. Определите промежуток времени (в секундах) между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка, если такая граната взорвется в воздухе на высоте $H = 10 \text{ м}$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10 \text{ м/сек}^2$. Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 6. **Решение.** Из закона движения для тела, брошенного с уровня земли под углом к горизонту α , дальность полета определяется соотношением $L = \frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha$. Поэтому

максимальная дальность полета получается при $\alpha = 45^\circ$ и равна $L = \frac{V_0^2}{g}$. Значит, $V_0 = \sqrt{gL}$.

Первым упадет на землю осколок, вылетающий вертикально вниз, последним – вылетающий вертикально вверх. Спустя время $\tau = \frac{2V_0}{g}$ последний осколок вернется на место

взрыва, то есть окажется в ситуации первого осколка. Поэтому искомый промежуток

времени равен $\tau = \frac{2V_0}{g}$ (не зависит от высоты H). Значит, $\tau = \frac{2\sqrt{gL}}{g} = 2\sqrt{\frac{L}{g}} = 6 \text{ сек}$.

5.2. Граната взрывается в воздухе на высоте 10 м , разлетевшись на множество мелких одинаковых осколков. Промежуток времени между моментами падения на землю самого

первого и самого последнего осколка составил 4 секунды. В каком радиусе (в метрах) осколки упадут на землю, если взорвется такая граната, лежащая на поверхности? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2 . Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 40.

5.3. Граната, лежащая на земле, разбивается на множество мелких одинаковых осколков, которые разлетаются в радиусе 40 м. Определите промежуток времени (в секундах) между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка, если такая граната взорвется в воздухе на высоте 10 м. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2 . Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 4.

5.4. Граната взрывается в воздухе на высоте 10 м, разлетевшись на множество мелких одинаковых осколков. Промежуток времени между моментами падения на землю самого первого и самого последнего осколка составил 6 секунд. В каком радиусе (в метрах) осколки упадут на землю, если взорвется такая граната, лежащая на поверхности? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/сек^2 . Сопротивление воздуха не учитывать.

Ответ: 90.

6.1. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением $S = 10 \text{ см}^2$, содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла $Q = 500 \text{ Дж}$. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса $P = 100 \text{ Н}$. С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление $P_0 = 10^5 \text{ Па}$?

Ответ: 1. **Решение.** В соответствии с первым началом термодинамики можно записать $Q\Delta t = \Delta A + \Delta U$ (2), где Δt – промежуток времени, ΔA – совершенная газом работа, ΔU – изменение внутренней энергии. Так как процесс изобарный, то для работы и внутренней энергии можно записать следующие соотношения:

$$\Delta A = \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) \Delta V, \Delta U = \frac{3}{2} \nu R \Delta T = \frac{3}{2} \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) \Delta V, \quad (3)$$

где ν – количество вещества. Подставив (3) в (2), получим $Q\Delta t = \frac{5}{2} \left(p_0 + \frac{P}{S}\right) S \Delta h$. Откуда

для скорости движения поршня получим $\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{Q}{2,5(p_0 S + P)}$

6.2. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением $S = 20 \text{ см}^2$, содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла $Q = 600 \text{ Дж}$. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса $P = 200 \text{ Н}$.

С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па?

Ответ: 0,6.

6.3. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением $S = 10$ см², содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла $Q = 500$ Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса $P = 300$ Н.

С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па?

Ответ: 0,5.

6.4. В вертикальный цилиндрический сосуд с поперечным сечением $S = 30$ см², содержащий один моль одноатомного идеального газа, поступает за одну секунду количество тепла $Q = 400$ Дж. Сосуд закрыт сверху тяжелым поршнем веса $P = 100$ Н.

С какой скоростью (в метрах в секунду) поднимается вверх этот поршень, если атмосферное давление $P_0 = 10^5$ Па?

Ответ: 0,4.