Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заочный этап 1

10-11 класс

В каждой из шести задач требуется дать только ответ. Решение присылать не нужно. Ответом на каждую задачу является целое число или десятичная дробь, имеющая не более двух знаков после запятой. В случае, когда количество знаков после запятой оказывается больше, дробь нужно округлить до сотых по правилам округления. При вычислениях (в случае необходимости) считать:

ускорение свободного падения равно 10 м/с^2

абсолютный ноль температур равен -273°C .

::1.1:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 7 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 16 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 34

Решение. Обозначим t_1 — длительность звукового сигнала, t_2 — длительность промежутка времени между звуковыми сигналами. Тогда условия задачи сводятся к двум уравнениям $3t_1 + 2t_2 = 7$, $6t_1 + 5t_2 = 16$. Откуда находим $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Теперь легко получить ответ на заданный вопрос $12t_1 + 11t_2 = 34$.

::1.2:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 8 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 17 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 35

::1.3:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 11 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 23 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 47

::1.4:: Воскресным днем, экспериментируя с новым секундомером, Гаврила выяснил, что пока настенные часы бьют три раза, проходит 13 секунд (между возникновением звука от первого удара и затуханием звука от последнего). Через некоторое время, когда часы отбивали шесть ударов, процесс боя занял 28 секунд. Сколько секунд пройдет, пока часы будут бить двенадцать раз?

Ответ: 58

::2.1:: Товарный поезд движется со скоростью 60 км/час, а пассажирский — в a раз быстрее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{21a}{4}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 80

Решение. Обозначим скорость товарного поезда через V, пассажирского — через aV, длины составов соответственно через L и l. Решим задачу в системе координат, связанной с товарным поездом. Тогда скорость пассажирского поезда равна $V(a+1)$ при движении поездов навстречу друг другу или V(a-1) — при обгоне. Соответственно время движения при встрече равно $\dfrac{L+l}{V(a+1)}$; при обгоне — $\dfrac{L+l}{V(a-1)}$. По условию $\dfrac{L+l}{V(a+1)} \cdot \dfrac{21a}{4} = \dfrac{L+l}{V(a-1)}$, отсюда $21a(a-1) = 4(a+1)$, $21a^2 - 25a - 4 = 0$, $a = \frac{4}{3}$. Значит, скорость пассажирского поезда равна 80 км/час.

::2.2:: Товарный поезд движется со скоростью 80 км/час, а пассажирский — в a раз быстрее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{10a}{3}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 120

::2.3:: Скорый поезд движется со скоростью 140 км/час, а пассажирский — в a раз медленнее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{21a}{4}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 105

::2.4:: Скорый поезд движется со скоростью 135 км/час, а пассажирский — в a раз медленнее. Гаврила выяснил, что при движении навстречу друг другу один поезд проходит мимо другого за время, в $\frac{10a}{3}$ раз меньшее, чем при обгоне. Найдите скорость пассажирского поезда (в км/час).

Ответ: 90

::3.1:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 50 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 20 см $\times$ 30 см на горизонтальной поверхности стола . В центре боковой грани 50 см $\times$ 30 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,45$?

Ответ: 240

Решение. Параллелепипед может начать двигаться по двум причинам: или скользить по поверхности стола (при этом сила трения F_1 достигнет величины силы трения скольжения), или кувыркаться вокруг ребра основания (если момент приложенной силы F_2 превысит момент силы тяжести). Проведем расчеты. Масса параллелепипеда равна $m = \rho abc = 60$ кг. Сила трения скольжения определяется формулой $F_1 = \mu mg = 270$ Н. Равенство моментов данной силы и силы тяжести $F_2 \cdot (a/2) = mg \cdot (b/2)$ приводит к значению силы $F_2 = mg \cdot (b/a) = 240$ Н. Результаты вычислений показывают, что данный параллелепипед начнет кувыркаться, еще до того, как трение достигнет величины трения скольжения.

::3.2:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 40 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 15 см $\times$ 20 см на горизонтальной поверхности стола. В центре боковой грани 40 см $\times$ 20 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,40$?

Ответ: 90

::3.3:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 60 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 25 см $\times$ 30 см на горизонтальной поверхности стола. В центре боковой грани 60 см $\times$ 30 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,43$?

Ответ: 375

::3.4:: Сплошной однородный прямоугольный параллелепипед высотой 30 см, выполненный из материала плотностью 2 г/см^3, стоит основанием 10 см $\times$ 20 см на горизонтальной поверхности стола. В центре боковой грани 30 см $\times$ 20 см приложена сила, перпендикулярная грани. Какой максимальной может быть величина силы (в ньютонах) для того, чтобы параллелепипед оставался неподвижным, если коэффициент трения между параллелепипедом и столом равен $0,41$?

Ответ: 40

::4.1:: Материальная точка массой 110 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = 2t - t^2, \\ y(t) = 1 - 4t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 0,22

Решение. Вычислим координаты вектора ускорения

$$\overline{a}(a_x; a_y) = \overline{a}(\ddot{x}; \ddot{y}) = \overline{a}(-2; 0).$$

Полученный результат говорит о том, что движение — равноускоренное, величина ускорения равна 2 м/с^2. Из второго закона Ньютона следует, что движение происходит под действие силы равной $F = ma = 0,22$ Н. Из другой формы записи второго закона Ньютона $F = \Delta p / \Delta t$ (в импульсной форме) следует ответ в задаче $\Delta p = F \Delta t = 0,22$ Н·с (в нашем случае $\Delta t = 1$ с).

Координаты вектора ускорения можно найти и без производной. Сравним данный закон движения с общей формой записи закона равноускоренного движения. Коэффициент при квадрате времени — это половина проекции ускорения на соответствующую ось. Отсюда следует, что $\overline{a}(-2; 0)$.

::4.2:: Материальная точка массой 150 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = t - 2t^2, \\ y(t) = 1 + 3t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 0,60

::4.3:: Материальная точка массой 120 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = 2t - 5t^2, \\ y(t) = 1 - 3t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 1,20

::4.4:: Материальная точка массой 160 г движется по плоскости по закону $\begin{cases} x(t) = 3t - 3t^2, \\ y(t) = 1 - 4t. \end{cases}$ Здесь координаты x, y — измеряются в метрах, время t — в секундах. Найдите величину изменения импульса этой материальной точки (в единицах СИ) за третью секунду движения.

Ответ: 0,96

::5.1:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_2 = 51°C$, $t_1 = 16°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 33,25

Решение. Во-первых, заметим, что для того чтобы в осях VT каждый участок замкнутого цикла был прямолинейным (одной из сторон четырехугольника) необходимо, чтобы этот участок цикла в осях PV был бы вида $P = const$ или $V = const$. Предположим противное, пусть в осях PV на участке замкнутого цикла наблюдается линейная зависимость давления от объема $P = \alpha V$. Подставим эту зависимость в закон Менделеева-Клапейрона $\alpha V^2 = \nu RT$. Отсюда следует, что зависимость объема от температуры оказывается нелинейной и в осях VT процесс не может быть представлен четырехугольником.

Во-вторых, в силу наличия на диаграмме PV двух участков, на которых выполняется условие $V = const$, на диаграмме VT возможна только одна диагональ четырехугольника, соответствующая условию задачи, — диагональ, на которой выполняется условие $T = const$. В итоге получаем, что в осях PV имеется прямоугольник $ABCD$ со сторонами параллельными осям две вершины которого лежат на одной изотерме. Пусть в вершине A температура минимальна и равна $T_1 = 273 + t_1$, а в вершине С — максимальна $T_2 = 273 + t_2$. Тогда вершины B и D лежат на одной изотерме с неизвестной температурой T.

Запишем закон Менделеева-Клапейрона для каждой вершины прямоугольника:

$$(A): P_1V_1 = \nu RT_1,\ (B): P_2V_1 = \nu RT,\ (C): P_2V_2 = \nu RT_2,\ (D): P_1V_2 = \nu RT$$

Перемножим 1-е и 3-е уравнения, затем 2- е и 4-е:

$$P_1P_2V_1V_2 = (\nu R)^2T_2T_1,\ P_1P_2V_1V_2 = (\nu R)^2T^2$$

Сравнение последних уравнений приводит к выводу $T^2 = T_1T_2$. Отсюда

$$T = \sqrt{T_1T_2} = \sqrt{289 \cdot 324} = 17 \cdot 18 = 306K$$

.

Таким образом, температура в вершинах B и D в градусах Цельсия будет равна $33°C$. Окончательно, средняя температура будет равна

$$\frac{16 + 51 + 33 + 33}{4} = 33,25$$

::5.2:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_2 = 88°C$, $t_1 = 16°C$.

Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 51

::5.3:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 16°C$, $t_2 = -17°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: -0,75

::5.4:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_2 = 88°C$, $t_1 = 51°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 69,25

::5.5:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 51°C$, $t_2 = -17°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 16

::5.6:: При проведении циклического процесса с идеальным газом самописец выдает PV и VT диаграммы этого процесса. При передаче графических материалов в теоретический отдел были утеряны подписи осей. Теоретики обнаружили на обеих диаграммах четырехугольники, причем одна из диагоналей одного из них оказалась параллельна координатной оси. Отдельно были записаны и переданы теоретикам максимальная и минимальная температуры, которые имел газ в течение процесса: $t_1 = 88°C$, $t_2 = -17°C$. Ученые смогли восстановить подписи осей и значения температур газа во всех вершинах четырехугольников. Укажите среднюю арифметическую температуру (в градусах Цельсия) по всем восьми вершинам четырехугольников.

Ответ: 33,25

::6.1:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 10\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 1$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 9

Решение. Количество полных оборотов можно определить по формуле

$$N = \left[\frac{\phi}{2\pi}\right],$$

где ϕ — полный угол поворота тела за время $t_0 = 60$ с, $[x]$ — целая часть числа x. Полный угол поворота ϕ определяется интегралом от $\omega(t)$:

$$\phi = \int_{\tau}^{t_0} \omega(t)dt = \omega_0\tau + \omega_0 \int_{\tau}^{t_0} \left(\frac{\tau}{t}\right)^2 dt = 2\omega_0\tau - \frac{\omega_0\tau^2}{t_0}$$

Подставляя числовые данные, получим ответ.

Ответ можно получить и без интегрирования. Площадь под кривой зависимости угловой скорости от времени можно примерно подсчитать, заменив кривую кусочно линейной функцией с шагом, например, τ. Площадь считается как сумма площадей трапеций. Сумма бесконечна, но на пятом члене суммы становится понятно, что остальные члены не могут повлиять на определения целого числа оборотов тела.

::6.2:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 16\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 2$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 31

::6.3:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 12\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 3$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 35

::6.4:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 11\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 4$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 42

::6.5:: Тело вращается вокруг неподвижной оси с угловой скоростью, которая меняется со временем по закону $\omega(t) = \omega_0$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$ и $\omega(t) = \omega_0 \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^2$ при $t \geqslant \tau$, где t — время в секундах, $\omega_0 = 9\pi$ с$^{-1}$ — начальная угловая скорость, $\tau = 5$ с — коэффициент. Оцените: сколько полных оборотов успеет совершить тело за одну минуту?

Ответ: 43