Олимпиада школьников ‹‹Ломоносов›› 2013/2014 учебного года по механике и математическому моделированию

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап

10-11 класс

№1. Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

Ответ: $\sqrt{339696} = 12\sqrt{2359} \approx 583$ км/ч.

Решение. Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 36 км/ч (это 10 м/с) и 600 км/ч (скорость, с которой преодолевается 900 км за 1,5 часа) и углом между ними 60°. Скорость равна корню из $36^2 + 600^2 - 36 \cdot 600$ $= 339696$, то есть $12\sqrt{2359} = \sqrt{339696}$ км/ч. Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик). В «чистовике» достаточно написать, что $582{,}5^2 < 339696$, а $583^2 > 339696$. Приближенное значение (для контроля): 582,83445…

Ответ варианта 142: $\sqrt{382896} = 12\sqrt{2659} \approx 619$ км/ч.

Ответ варианта 143: $\sqrt{339696} = 12\sqrt{2359} \approx 583$ км/ч.

Ответ варианта 144: $\sqrt{382896} = 12\sqrt{2659} \approx 619$ км/ч.

№2. С борта неподвижного аэростата, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: *A*, *B* и *C*. При этом все три угла, под которыми видны с аэростата три отрезка *AB*, *BC* и *AC*, – прямые. Может ли расстояние между объектами *A* и *B* быть равным 24 км, если расстояние между *B* и *C* равно 12 км, а расстояние между *A* и *C* равно 20 км? Укажите все значения, которые может принимать расстояние между объектами *A* и *B*.

Ответ: а) не может; б) от 16 до $\sqrt{544} = 4\sqrt{34}$ км (не включая эти значения).

Решение. Если обозначить стороны треугольника *ABC* через *x*, *y*, *z*, а расстояния от объектов до дирижабля через *a*, *b*, *c*, то получается: $a^2 + b^2 = x^2$, $b^2 + c^2 = y^2$, $c^2 + a^2 = z^2$. Отсюда

$a^2 = \dfrac{z^2 + x^2 - y^2}{2}$; $b^2 = \dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$; $c^2 = \dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2}$. Положительное решение a, b, c найдется тогда и только тогда, когда $z^2 + x^2 > y^2$, $x^2 + y^2 > z^2$, $y^2 + z^2 > x^2$. Если $x = 12$, $y = 20$, то

$20^2-12^2<z^2<20^2+12^2$, откуда $z\in\left(16;\sqrt{544}\right)$. Так как $24>4\sqrt{34}$, то расстояние AB не может быть равным 24.

Возможно и геометрическое решение. Пусть аэростат находится в центре трехмерной системы координат, а объекты находятся на положительных полуосях *Ox, Oy* и *Oz*. Если провести плоскость через эти три объекта (пересечь трехгранный угол плоскостью), то получится остроугольный треугольник. С другой стороны, для любого остроугольного треугольника такая площадь существует. Поэтому ситуация возможна тогда и только тогда, когда *x, y, z* будут сторонами остроугольного треугольника. Это означает, что $z^2+x^2>y^2$, $x^2+y^2>z^2$, $y^2+z^2>x^2$.

Ответ варианта 142: а) не может; б) от $4\sqrt{7}=\sqrt{112}$ до 20 км (не включая эти значения).

Ответ варианта 143: а) не может; б) от 12 до $\sqrt{306}=3\sqrt{34}$ км (не включая эти значения).

Ответ варианта 144: а) не может; б) от $5\sqrt{7}=\sqrt{175}$ до 25 км (не включая эти значения).

№3. Хитрый волк, засевший в 20 метрах севернее и в 10 метрах восточнее могучего дуба, в момент времени $t=0$ заметил зайца в 20 метрах севернее от себя. Волк знает, что заяц движется по закону: $x=x_0+at$, $y=y_0+bt^2$, где начало системы координат – могучий дуб, ось x направлена на восток, ось y – на север, расстояния x, x_0, y, y_0 измеряются в метрах, t – время в секундах, $a=12$ м/с, $b=1$ м/с^2. Произведя мгновенный расчет, волк стартовал и побежал строго по прямой с постоянной скоростью 15 м/с без поворотов и остановок. Есть ли у него возможность поймать зайца? Если да, то через какое время это может произойти?

Ответ: да; через 4 секунды.

Решение. Заяц движется по закону $x=10+12t$, $y=40+t^2$, а Волк по закону $x=10+15t\cos\alpha$, $y=20+15t\sin\alpha$, где α – угол наклона прямой, по которой движется волк. Условие встречи: $\begin{cases}10+12t=10+15t\cos\alpha,\\ 40+t^2=20+15t\sin\alpha.\end{cases}$ Из первого уравнения $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, поэтому $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, и из второго уравнения: $t^2-9t+20=0$, откуда $t=4$ или $t=5$. Значение $t=5$ следует отбросить, так как встреча в момент времени $t=4$ произойдет раньше (на этой же прямой!).

Другое решение. Заяц движется по правой ветви параболы с вершиной (10, 40), а ГМТ нахождения волка через время t – окружность с центром (10, 20) и радиусом $15t$: $(x-10)^2+(y-20)^2=225t^2$. Подставив в уравнение окружности закон движения зайца $x=10+12t$, $y=40+t^2$, получим: $t^4-41t^2+400=0$. Отсюда $t=4$ или $t=5$.

Ответ варианта 142: да; через 2 секунды.

Ответ варианта 143: да; через 4 секунды.

Ответ варианта 144: да; через 2 секунды.

№4. Жители дома решили построить во дворе ледяную горку для детей. Склон горки прямолинейный и настолько длинный, что, разогнавшись, санки двигаются по склону с постоянной скоростью, определяемой балансом силы тяжести и силы сопротивления, направленной против вектора скорости. Каким следует выбрать угол наклона склона горки к горизонту, чтобы горизонтальная составляющая скорости санок была наибольшей? Считать, что сила сопротивления движению пропорциональная второй степени скорости санок.

Ответ: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение: горизонтальная скорость санок равна $V_x = V\cos\alpha,$ условие баланса сил $mg\sin\alpha = \kappa V^2$. Задача сводится к максимизации функции $f(\alpha) = \sqrt{\dfrac{mg}{k}} \cdot \sqrt{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$. Наибольшее значение достигается при $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ варианта 142: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ варианта 143: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ варианта 144: $\alpha = arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

№5. Старшеклассник в школьной лаборатории проводил испытания с небольшой порцией идеального одноатомного газа. Оборудование позволяло совершать только изобарный и изохорный процессы так, что давление и объем могли меняться только в целое число раз. Ему удалось заставить газ совершить замкнутый цикл, КПД которого оказался равен 8/33. Какое максимальное значение может принимать отношение максимального объема к минимальному в этом цикле.

Ответ: 5.
Решение.

$$\eta = \frac{(P_{\max} - P_{\min})(V_{\max} - V_{\min})}{\frac{3}{2}V_{\min}(P_{\max} - P_{\min}) + \frac{5}{2}P_{\max}(V_{\max} - V_{\min})} = \frac{1}{\frac{3}{2}\frac{1}{n-1} + \frac{5}{2}\frac{m}{m-1}}$$

m – отношение максимального давления к минимальному давлению;

n – отношение максимального объема к минимальному давлению.

Получается $\eta = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2(n-1)} + \dfrac{5m}{2(m-1)}}$. Упрощаем: $\eta = \dfrac{2(n-1)(m-1)}{3(m-1) + 5m(n-1)} = \dfrac{2(mn - m - n + 1)}{5mn - 2m - 3}$.

Дано $\eta = \frac{8}{33}$. Найти $n_{\max}$.

$\frac{2(mn-m-n+1)}{5mn-2m-3} = \frac{8}{33}$; $33mn-33m-33n+33 = 20mn-8m-12$; $33n+25m = 13mn+45$;

$m = \frac{33n-45}{13n-25} = \frac{\frac{33}{13}(13n-25)+\frac{33\cdot 25}{13}-45}{13n-25} = \frac{33}{13}+\frac{33\cdot 25-45\cdot 13}{13(13n-25)}$. Поэтому $13m = 33+\frac{240}{13n-25}$, и число $240 = 2^4\cdot 3\cdot 5$ должно делиться на $(13n-25)$. Перебором получаются 2 пары решений: $n=2$, $m=21$ и $n=5$, $m=3$. Поэтому ответ: 5.

Ответ варианта 142: 11

Ответ варианта 143: 21

Ответ варианта 144: 10

№6. Движение точки вдоль прямой фиксируется фотоаппаратом со стробоскопом, дающим ежесекундно вспышки, первая из которых синхронизирована с началом движения точки.

При анализе фотоснимков ввели координату точки x(t), t≥0, x(0)=0 и установили, что за каждый секундный промежуток между вспышками изменение координаты точки прямо пропорционально такому изменению за предыдущий промежуток между вспышками. Кроме того, через n секунд после начала движения (т.е. в момент n+1 вспышки) оказалось, что x(n)=nx(1).

а) При каких натуральных значениях n из приведенных выше условий следует, что за каждый промежуток между вспышками изменение координаты точки одинаково?

б) При каких натуральных n существует движение точки, отличное от описанного в пункте а?

Ответ во всех вариантах:

при чётных n за каждую секунду проходятся одинаковые расстояния; при нечётных – возможно другое движение.

Решение. По условию $x(n) = q\cdot x(n-1)$, где q – коэффициент пропорциональности, $x(i)$ – изменение координаты. Следовательно, $x(i)$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Дополнительное условие $S(n) = n\cdot x(1)$.

Ясно, что если $q=1$, то $x(n) = x(1)$ и $S(n) = n\cdot x(1)$. Поэтому $q=1$ удовлетворяет условию. Значит, вопрос задачи формулируется следующим образом: при каких n уравнение $S_n = \frac{(q^n-1)}{q-1} = nx_1$ имеет решение $q\neq 1$?

1. Рассмотрим чётные n, т. е. $n = 2m$. Получаем уравнение $q^{2m} = 2m(q-1)+1$. Построив графики функций $y = q^{2m}$ и $y = 2m(q-1)+1$, убеждаемся, что при $q = 1$ есть решение. Кроме того, вторая функция совпадает с касательной к графику первой, проведенной в точке $q = 1$. Поэтому решений $q \neq 1$ нет.

2. Пусть $n = 2m+1$. $n = 2m$. Построив соответствующие графики, устанавливаем, что кроме касания при $q = 1$, имеется ещё ровно одно пересечение при $q < 0$.

Ответ: при чётных n за каждую секунду проходятся одинаковые расстояния; при нечётных – возможно другое движение.