ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА. 7 – 8 классы

Ответы; краткие решения и критерии оценки задач

1. Автомобиль новой модели на одном литре бензина проходит на $4\frac{1}{6}$ километра больше, чем автомобиль старой модели. При этом расход бензина на 100 км у него на 2 литра меньше. Сколько литров бензина на 100 км расходует новый автомобиль?

Ответ: 6 литров.

Указания. Расход нового автомобиля равен x литров, расход старого равен $x+2$ литра. Уравнение: $\frac{100}{x}-\frac{100}{x+2}=\frac{25}{6} \Leftrightarrow \frac{4(x+2-x)}{x(x+2)}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow x^2+2x-48=0 \Leftrightarrow x=-8; x=6$. Поэтому $x=6$ литров.

2. Гаврила с Глафирой взяли стакан, заполненный до краев водой, и немного воды вылили в три формочки для льда, положив их потом в морозильник. Когда лед замерз, получившиеся три кубика положили обратно в стакан. Гаврила предсказал, что часть воды из стакана выльется, так как при замерзании лед расширился в объеме. Глафира же утверждала, что уровень воды будет ниже края стакана, так как часть плавающего льда будет выступать над поверхностью воды. Кто же прав и почему?

Ответ: Не прав никто. Вода будет заполнять стакан ровно до его краев.

Указания. Пусть V – объем воды в формочках. Тогда объем W льда в формочках можно определить из закона сохранения массы $V\cdot\rho_{\text{воды}}=W\cdot\rho_{\text{льда}}$. При плавании льда объемом W, погруженную в воду часть этого объема U, можно определить из условия плавания тел $U\cdot\rho_{\text{воды}}=W\cdot\rho_{\text{льда}}$. Очевидно поэтому, что $V = U$.

3. Школьники Чуков и Геков катаются на коньках с постоянными скоростями по замкнутому кругу беговой дорожки ледового стадиона. Если Чуков бежит по часовой стрелке, а Геков – против, то их встречи происходят в четыре раза чаще, чем происходят обгоны в случае, когда они бегут в одном направлении. Скорость одного из школьников равна 6 м/сек. Какова скорость другого?

Ответ: Либо 10 м/сек, либо 3,6 м/сек.

Указания. При движении навстречу время между встречами равно $t_1=\frac{L}{V_1+V_2}$, при попутном движении время между обгонами: $t_2=\frac{L}{V_1-V_2}$ (здесь L – длина одного круга, V_1, V_2 – скорости). По условию $\frac{t_2}{t_1}=4$, поэтому $\frac{V_1+V_2}{V_1-V_2}=4$, откуда $\frac{V_2}{V_1}=\frac{3}{5}$.

В условии не сказано, скорость кого дана. Поэтому или $\frac{6}{V}=\frac{3}{5}$ (тогда $V=10$ м/сек), или $\frac{V}{6}=\frac{3}{5}$ (тогда $V=3{,}6$ м/сек).

4. В большой ящик Гаврила вложил 7 ящиков поменьше. После этого Глафира в какие-то из этих семи ящиков вложила ещё по 7 маленьких ящиков, а в какие-то не вложила ничего. Потом Гаврила в какие-то из пустых ящиков вложил по 7 ящиков, а в какие-то нет. Глафира снова повторила эту операцию и так далее. В какой-то момент непустых ящиков оказалось 34. Сколько при этом было пустых?

Ответ: 205.

Указания. Операция заполнения одного ящика увеличивает количество пустых ящиков на $7-1=6$ штук, а количество непустых – на 1. Значит, после заполнения n ящиков (неважно, на каком этапе) их количество будет: пустых – $1+6n$ штук; непустых – n штук. Поэтому $n=34$, и непустых ящиков будет $1+6\cdot 34=205$.

5. Сосуд заполнен холодной водой. С этим сосудом проделывают следующую процедуру: отливают три четверти холодной воды и доливают до первоначального объема горячей водой. При этом температура воды в сосуде увеличивается на 24° С. После этого процедуру повторяют несколько раз: отливают три четверти объема воды и доливают до первоначального объема горячей водой (той же температуры).

А) За какое количество процедур температура воды в сосуде будет отличаться от температуры горячей воды на 3° С?

Б) Возможно ли добиться того, чтобы температура воды в сосуде отличалась от температуры горячей воды ровно на 1° С?

Ответ: А) $n=4$; Б) невозможно.

Указания. Из уравнения баланса тепла:

$$t_1-t_c=t_h-t_1 \quad\Rightarrow\quad 2t_1=t_c+t_h \qquad (1)$$

$$t_2-t_1=t_h-t_2 \quad\Rightarrow\quad 2t_2=t_h+t_1 \quad\Rightarrow\quad t_2=t_h+\frac{t_h+t_c}{2} \quad\Rightarrow\quad t_2=\frac{t_c+3t_h}{4} \qquad (2)$$

Аналогично $t_3=\dfrac{t_c+7t_h}{8}$ (3)

…

$$t_n=\frac{t_c+\left(2^n-1\right)t_h}{2^n} \quad\Rightarrow\quad 2^n=\frac{t_h-t_c}{t_h-t_n} \qquad (4)$$

Из условия задачи и из (1) следует, что $t_h-t_c=48$. Из (4) получим, что: А) $n=4$; Б) невозможно.

Все задачи оценивались по следующим критериям:

20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ;

15 баллов – в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты в обосновании;

10 баллов – решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки.