ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА

Краткие решения и критерии оценки задач заочного тура

1. Камень подброшен вертикально вверх с начальной скоростью V. Пренебрегая силой сопротивления воздуха и полагая ускорение свободного падения равным 10 м/с^2, определите, при каких значениях V все моменты достижения высоты 10 м будут лежать между: А) первой и второй секундами после начала движения; Б) второй и четвертой секундами после начала движения.

Решение. Зависимость высоты от времени есть $h(t) = Vt - \dfrac{gt^2}{2}$. Поэтому на высоте 10 м камень будет в моменты времени $10 = Vt - 5t^2$. Получается уравнение $5t^2 - Vt + 10 = 0$, которое при $V^2 \geqslant 200$ (т. е. при $V \geqslant 10\sqrt{2}$) имеет корни: $t_{1,2} = \dfrac{V \pm \sqrt{V^2 - 200}}{10}$.

$$\text{А) } 1 < \frac{V - \sqrt{V^2 - 200}}{10} \leqslant \frac{V + \sqrt{V^2 - 200}}{10} < 2 \;\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{V^2 - 200} < V - 10 \\ \sqrt{V^2 - 200} < 20 - V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\sqrt{2} \leqslant V \leqslant 20 \\ V^2 - 200 < (V - 10)^2 \\ V^2 - 200 < (20 - V)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10\sqrt{2} \leqslant V \leqslant 20 \\ V < 15 \end{cases} \Leftrightarrow V \in \left[10\sqrt{2}; 15\right).$$

Б) По теореме Виета произведение корней квадратного уравнения $5t^2 - Vt + 10 = 0$ равно $\dfrac{10}{5} = 2$. Поэтому условия $t_1 > 2$ и $t_2 > 2$ одновременно выполняться не могут.

Ответ: *А)* $V \in \left[10\sqrt{2}; 15\right)$ *м/с; Б)* $V \in \varnothing$.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ (включение в ответ значения V = 15м/с на оценку не влияет); **15 баллов** – какие-либо существенные недочеты (при правильных ответах); **10 баллов** – верное решение одной из частей: либо А, либо Б; **5 баллов** – выписана верная система иррациональных неравенств, но допущены ошибки при ее решении; **0 баллов** – все остальное.

2. Глобус имеет диаметр 20 см. Определите примерную площадь, которую занимает на этом глобусе территория России. Все недостающие для решения задачи данные найдите в справочниках.

Решение. Из справочника находим $S_{\text{России}} = 17098246$ кв. км $= 17{,}1 \cdot 10^{12}$ кв. м, $R_{\text{Земли}} = 6371$ км $= 637 \cdot 10^4$ м. Коэффициент подобия: $k = \dfrac{R_{\text{глоб.}}}{R_{\text{Земли}}} = \dfrac{10^{-1}}{637 \cdot 10^4} = \dfrac{10^{-5}}{637}$. Значит, $\dfrac{x}{S_{\text{России}}} = k^2$;

$$x = k^2 \cdot S_{\text{России}} = \left(\frac{10^{-5}}{637}\right)^2 \cdot 17{,}1 \cdot 10^{12} \text{ кв. м} = 4{,}21 \cdot 10^{-3} \text{ кв. м} = 42 \text{ кв. см.}$$

Ответ: 42 кв. см.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение + правильный ответ; **10 баллов** – идейно верное решение, но ответ отличается заметно (на 5 кв. см. или больше) из-за грубых ошибок округления или вычисления; **5 баллов** – идейно верное решение (площади относятся как квадрат коэффициента подобия), но ответ отличается в 2 раза или больше; **0 баллов** – все остальное.

3. В дачном поселке, где летом отдыхает Гаврила, есть водопровод с холодной водой. Родители мальчика установили водонагреватель, который имеет фиксированную мощность, если только температура находящейся в нем воды ниже $100\,^\circ$С. После входа водопроводной трубы в дом установили тройник, так что часть воды идет через нагреватель в горячий кран, а остальная вода - напрямую в холодный. Перед выходом горячая и холодная вода смешиваются. Гаврила полностью открыл холодный кран и узнал, что температура воды $20\,^\circ$С, когда он закрыл холодный кран и открыл горячий - пошла вода с тем же расходом с температурой $40\,^\circ$С. Тогда Гаврила открыл оба крана одинаково так, что расход остался прежним. Какова температура воды в этом случае?

Решение. В обоих случаях при одинаковом расходе за одно и то же время проходит одинаковое количество воды, при этом ей передается одинаковое количество теплоты. Следовательно, температура на выходе та же: $t_3 = t_2 = 40°\mathrm{C}$.

Ответ: $40°\mathrm{C}$.

Критерии: 20 баллов – верное решение, возможно через уравнение теплового баланса; **10 баллов** – показано, что при уменьшении расхода через нагреватель температура горячей воды увеличивается, но итоговая температура найдена неверно; **0 баллов** – все остальное.

4. В десятилитровое ведро до краев насыпали смородину. Гаврила сразу же сказал, что в ведре 10 кг смородины. Глафира подумала и оценила вес ягод в ведре более точно. Как это сделать, если плотность ягоды смородины можно приблизительно считать равной плотности воды?

Решение. При оценочных расчетах можно считать размеры ягод одинаковыми и много меньшими размера ведра. Если насыпать ягоды одним слоем, то при наиболее плотной упаковке у каждой ягоды будет 6 соседей: центры ягод будут в вершинах правильных треугольников со сторонами, равными диаметру ягод. При насыпании следующего слоя ягоды будут располагаться в углублениях между ягодами предыдущего слоя. При такой упаковке у каждой ягоды будет 12 соседей, а центры ягод будут находиться в вершинах правильных тетраэдров.

Для вычисления доли объема, приходящейся на ягоды, можно мысленно «вырезать» из решетки, образованной центрами ягод, параллелепипед с ребрами длиной $2NR$, где R – радиус ягоды, N – число ягод, укладывающихся вдоль стороны, причем в двух противоположных вершинах ребра сходятся под углами $60°$ между собой. Объем такого параллелепипеда $4\sqrt{2}N^3R^3$ и в него помещается около N^3 ягод объемом $\frac{4}{3}\pi R^3$ каждая (около стенок ягоды помещаются не полностью, но их число порядка N^2, так что при больших N этим обстоятельством можно пренебречь). Поэтому отношение объема ягод к объему ведра приблизительно равно $\frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,74$, так что в 10-литровом ведре при максимально плотной упаковке примерно 7,4 кг ягод. В реальности их несколько меньше из-за неплотности.

Отношение объема ягод к объему емкости можно считать и иначе. Например, рассматривать прямоугольный параллелепипед, в котором ягоды уложены слоями, расстояние между которыми равно высоте указанного выше тетраэдра $\frac{2\sqrt{2}R}{\sqrt{3}}$. В каждом слое расстояние между рядами равно высоте правильного треугольника $R\sqrt{3}$. Тем самым N^3 ягод займут параллелепипед длиной $2RN$, шириной $\sqrt{3}RN$ и высотой $\frac{2\sqrt{2}RN}{\sqrt{3}}$. Отношение объемов равно $\frac{N^3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{2RN \cdot \sqrt{3}RN \cdot \frac{2\sqrt{2}RN}{\sqrt{3}}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}$.

Ответ: около 7 кг.

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ (от 7 до 7,4 кг); **15 баллов –** в целом идейно верное решение, имеющее погрешности, не повлиявшие на ответ; **10 баллов** – идейно верное решение, имеющее серьезные погрешности; так же оцениваются решения, в которых коэффициент плотности $\frac{\pi\sqrt{2}}{6}$ (или 74%) используется без доказательства; **5 баллов –** учтено уплотнение в слое, но не учтено уплотнение между слоями; **0 баллов –** все остальное.

5. Две гантели, состоящие из невесомых стержней длины $2L$ и одинаковых небольших шариков, скользят с одинаковыми скоростями V навстречу друг другу как показано на рисунке. Опишите движение гантелей после соударения шаров в двух случаях: А) удар абсолютно упругий; Б) удар абсолютно неупругий.

Решение. При ударе любых двух шаров скорость остальных не изменяется, так как удар происходит мгновенно. При абсолютно упругом ударе двух одинаковых шаров они обмениваются скоростями. Следовательно, каждая гантель начнет вращаться вокруг своего центра с угловой скоростью $\frac{V}{L}$. Спустя полпериода шары, которые не участвовали в первом ударе, окажутся в месте первоначального удара (радиусами шаров пренебрегаем). После второго абсолютно упругого удара гантели разойдутся, сохранив поступательный характер движения и скорость.

В случае абсолютно неупругого удара соприкасающиеся шары слипнутся и станут неподвижными. Система начнет вращаться вокруг этой точки с угловой скоростью $\frac{V}{2L}$.

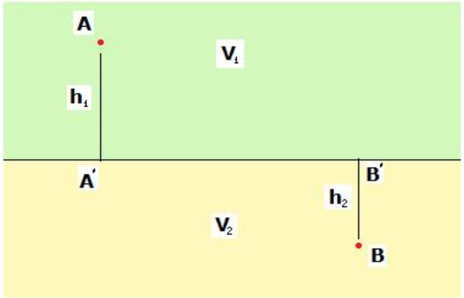
Ответ: А) разойдутся, сохранив исходные скорости;

Б) начнут вращаться с угловой скоростью $\frac{V}{2L}$.

Критерии: 20 баллов – верное обоснованное решение (возможно, не такое, как выше); **15 баллов –** решение с недостаточным обоснованием; **10 баллов –** в целом верное решение, но не указаны количественные характеристики; либо в абсолютно упругом ударе не учтен второй удар; **5 баллов –** верное решение одного из пунктов; либо решение, в котором учтены основные эффекты, но делаются какие-либо ошибки; **0 баллов –** все остальное.

6. *Попытайтесь максимально продвинуться в аналитическом решении приведенной ниже задачи. В случае необходимости на завершающем этапе может быть использован компьютер.*

Пункт A расположен на лугу, пункт B – на песчаной пустоши. Расстояние между пунктами равно 24 км. Границей раздела пустоши и луга является прямая линия. Расстояние от пункта A до границы равно 8 км, расстояние от пункта B до границы равно 4 км. Найдите минимальное время, за которое пешеход попадет из пункта A в пункт B, если его максимальная скорость по пустоши равна 3 км/час, а по лугу – 6 км/час.



Решение. Наша задача: найти такую точку C на $A'B'$ (см. рисунок), чтобы путь по траектории $AC + CB$ занимал минимально возможное время. Расстояние $A'B'$ равно $12\sqrt{3}$, пусть $A'C = x$, где $x \in \left[0; 12\sqrt{3}\right]$ (на самом деле очевидно, что $x \in \left[8\sqrt{3}; 12\sqrt{3}\right]$).

Тогда время передвижения t равно

$\frac{AC}{V_1} + \frac{CB}{V_2} = \frac{\sqrt{x^2+64}}{6} + \frac{\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}{3}$. Таким образом, нужно найти минимум функции

$$f(x) = \frac{1}{6}\left(\sqrt{x^2+64} + 2\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}\right). \qquad (1)$$

Первый поход связан с использованием производной. Производная

$$f'(x) = \frac{1}{6}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+64}} - \frac{2\left(12\sqrt{3}-x\right)}{\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}\right) \text{ равна нулю при } \frac{x}{\sqrt{x^2+64}} = \frac{2\left(12\sqrt{3}-x\right)}{\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}. \qquad (2)$$

Необходимо найти корни этого уравнения.

Второй подход основан на использовании аналогии с распространением света. Соотношение $\frac{V_1}{\sin\alpha} = \frac{V_2}{\sin\beta}$ в наших обозначениях запишется как $\frac{6\sqrt{x^2+64}}{x} = \frac{3\sqrt{\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16}}{12\sqrt{3}-x}$, что эквивалентно (2).

Уравнение (2) приводится к виду $x^2\left(\left(12\sqrt{3}-x\right)^2+16\right) = 4\left(12\sqrt{3}-x\right)^2\left(x^2+64\right)$

$$\Leftrightarrow x^4 - 24\sqrt{3}x^3 + 512x^2 - 2048\sqrt{3}x + 36864 = 0. \qquad (3)$$

Это алгебраическое уравнение аналитически не решается. И именно в этом месте следует воспользоваться компьютером. Получаются приближенные корни $x_1 = 18,7138$ и $x_2 = 22,9267$ (не подходит, т. к. это значение больше $12\sqrt{3}$). Это численное решение (достаточная точность $x = 18,7$) участники олимпиады могут получить с использованием калькулятора или любых компьютерных программ: как пакетных (Excel, Mathematica, WolframAlpha и т.п.), так и написанных самостоятельно. Подробное описание процесса получения не требуется.

Подстановка $x = 18,7138$ в (1) дает значение времени $t = 4,89$ час. (или 4 час. 53 мин. 24 сек).

Ответ: 4,89 час (допустимо 4,9 час.) или 4 час 53 мин (4 час 54 мин.).

Критерии: 20 баллов – верное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов** – верное в основном решение, но ответ отличается от правильного более чем на 30 секунд; **10 баллов** – верный ответ, но компьютер привлекается на ранней стадии решения (например, с помощью него ищется минимум функции (1) или нули функции (2)) – тем самым нарушается требование условия: «попытайтесь максимально продвинуться в аналитическом решении задачи»; **5 баллов** – верный подход к решению, но ответ либо отсутствует, либо неверный; **0 баллов** – все остальное.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***