

Ответы на задания заключительного тура олимпиады «Ломоносов» по механике
6 — 8 класс

1. Хватит, т.к. пройдет 179/180 часа.
2. Да, увеличилось.
3. Положить прямоугольник так, чтобы концы его короткой стороны лежали на окружности, а длинные стороны пересекали окружность. Отметить четыре точки пересечения с окружностью. Соединить их "по диагонали". Точка пересечения — центр окружности.
4. Чек купил больше, а именно 250 метров.
5. В сторону деревянного шара.

9 класс

1. $\frac{a_{\text{ч}}}{a_{\text{д}}} = \frac{\rho_{\text{д}} (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}})}{\rho_{\text{ч}} (\rho_{\text{д}} - \rho_{\text{в}})} \approx 1,0024$
2. Нет, например $x(t) = \frac{1}{2}t + f(t)$, где $f(t)$ — произвольна функция с периодом a
3. Положить прямоугольник так, чтобы концы его короткой стороны лежали на окружности, а длинные стороны пересекали окружность. Отметить четыре точки пересечения с окружностью. Соединить их "по диагонали". Точка пересечения — центр окружности.
4. $\frac{3\pi n^2}{G\tau^2} \approx 20000 \text{ кг/м}^3$
5. Успеет, так как цель видна в течение $\sqrt{5} > 2,2 \text{ с}$.

9 класс

1. В воздухе на каждый шар действует сила тяжести и сила Архимеда. Так как в воздухе шары уравновешены, если точка опоры посередине, имеем

$$(\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}) V_{\text{ч}} = (\rho_{\text{д}} - \rho_{\text{в}}) V_{\text{д}}.$$

Отсюда $V_{\text{ч}}/V_{\text{д}} = (\rho_{\text{д}} - \rho_{\text{в}}) / (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}})$. В проекции на горизонтальную плоскость при скольжении действует только одна сила, одинаковая для обоих шаров, отношение ускорений равно обратному отношению масс:

$$\frac{a_{\text{ч}}}{a_{\text{д}}} = \frac{m_{\text{д}}}{m_{\text{ч}}} = \frac{\rho_{\text{д}} \rho_{\text{д}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{ч}} \rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{в}}} \approx 1.0024$$

Ответ: 1.0024.

2. Условию задачи удовлетворяют все движения вида: $x(t) = t/2 + f(t)$, где $f(t)$ — любая периодическая функция с периодом a .

Ответ: Не является.

3. Достаточно расположить прямоугольник так, чтобы две его смежные вершины лежали на окружности (это возможно, так как одна из сторон меньше диаметра). Эти две вершины и две другие точки пересечения длинных сторон с окружностью — вершины прямоугольника. Его диагонали — хорды, которые стягивают дуги, на которые опираются прямые углы, т.е. диаметры. Так как точкой пересечения диагонали делятся пополам, точка пересечения диагоналей построенного прямоугольника — искомый центр окружности. Заметим, что провести диагонали можно с помощью длинной стороны картонного прямоугольника.

Ответ: Возможно.

4. Бот удерживается на орбите силой притяжения к планете, которая создает центростремительное ускорение, равное $4\pi^2 R/T^2$, где R — радиус планеты, а T — период обращения бота. Из II закона Ньютона имеем:

$$m \frac{4\pi^2 R}{T^2} = G \frac{m\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}, \quad \rho = \frac{3\pi}{GT^2}.$$

Подставляя приближенное значение гравитационной постоянной G и $T = 4 \cdot 60$ секунд, получим $\rho \approx 20000$ кг/м³. Приближенное значение G дает понять требуемую точность вычислений — 10%.

Ответ: 20000 кг/м³.

5. Снайпер успеет поразить цель, если найдется такой промежуток времени $[t_1, t_2]$, $t_2 > t_1 + 2$, что на всем этом промежутке $x(t) \geq 1$. Определим моменты времени, когда цель проходит точку $x(t) = 1$.

$$2t + t^2 + 2t^3 - t^4 = 1 \Leftrightarrow 1 - 2t - t^2 - 2t^3 + t^4 = 0.$$

При $t > 0$ обе части равенства можно разделить на t^2 и ввести новую переменную $z = t + \frac{1}{t}$. Тогда получим уравнения: $z^2 - 2z - 3 = 0 \Leftrightarrow (z - 3)(z + 1) = 0$. Так как $z > 0$ по определению, получаем уравнение относительно t

$$t + \frac{1}{t} = 3, \quad t_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

На промежутке $[t_1, t_2]$ $x(t) \geq 1$ и $t_2 = t_1 + \sqrt{5} > t_1 + 2, 2$.

Ответ: успеет.