Ответы на задания заключительного тура олимпиады «Ломоносов» по механике
10 — 11 класс
Вариант 121

1. 9:00 и 17:00
2. 6000 кг/м^3
3. $\dfrac{\alpha}{100-(100-\alpha)\eta_0}$; при всех.
4. 13:00
5. 2τ
6. Успеет.

Вариант 122

1. 13:20 и 14:40
2. 10000 кг/м^3
3. $\dfrac{\beta}{100-(100-\beta)\eta_0}$; при всех.
4. 14:55 и 17:15
5. 2τ
6. Успеет.

Вариант 123

1. 11:00 и 19:00
2. 17000 кг/м^3
3. $\dfrac{m}{100-(100-m)\eta_0}$; при всех.
4. 15:36 и 16:24
5. 2τ
6. Успеет.

Вариант 124

1. 11:20 и 12:40
2. 8000 кг/м^3
3. $\dfrac{k}{100-(100-k)\eta_0}$; при всех.
4. 18:20 и 19:40
5. 2τ
6. Успеет.

1.4 Решения заданий очного тура

10 — 11 класс

1. Из условия в 12:00 следует, что трассы пересекаются под углом 60° . Т. к. они пересекли перекресток после этого, то они движутся в его сторону. Т. к. велосипедист потратил на эту дорогу в два раза больше времени, то его скорость в два раза меньше скорости мотоциклиста, т. е. 36 км/ч .

Если отсчет времени t начать с момента 13:00 (при этом возможны и отрицательные значения t), то мотоциклист в момент времени t находится от точки пересечения на расстоянии $|72t|$, а велосипедист — на расстоянии $|36(t-1)|$. Поэтому по теореме косинусов:

$$72^2t^2 + 36^2(t-1)^2 - 2\cdot 72\cdot 36|t||t-1|\cdot\frac{1}{2} = 252^2,$$

или после сокращения:

$$2^2t^2 + (t-1)^2 - 2|t||t-1| = 7^2.$$

Очевидно, значения t между 0 и 1 не подходят (следует из простой оценки для расстояния между ними), поэтому: $4t^2 + t^2 - 2t + 1 - 2t^2 + 2t = 49$, т. е. $t^2 = 16$. Значит, нужные моменты времени: 09:00 и 17:00.

Ответ: 09:00 и 17:00.

2. Бот удерживается на орбите силой притяжения к планете, которая создает центростремительное ускорение, равное $4\pi^2(2R)/T^2$, где R — радиус планеты, а T — период обращения бота. Из II закона Ньютона имеем:

$$m\frac{4\pi^2(2R)}{T^2} = G\frac{m\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{(2R)^2}, \quad \rho = \frac{24\pi}{GT^2}.$$

Подставляя приближенное значение гравитационной постоянной G и $T = 4\cdot 60\cdot 60$ секунд, получим $\rho \approx 6000$ кг/м^3. Приближенное значение G дает понять требуемую точность вычислений — 10%.

Ответ: 6000 кг/м^3.

3. Тепловая машина «Ломоносов» 12341 получает тепло на участке 1-2 и отдает на участке 3-4. Следовательно,

$$\eta_0 = 1 - \frac{Q_{34}}{Q_{12}},$$

(здесь и далее все теплоты подразумеваются положительными). Машина «Авогадро» 1231 получает тепло также на 12, а отдает на 31, поэтому

$$\eta_1 = 1 - \frac{Q_{13}}{Q_{12}},$$

Машина «Больцман» 1341 получает тепло на 13, а отдает на 34, значит

$$\eta_2 = 1 - \frac{Q_{34}}{Q_{13}}.$$

Комбинируя три указанные выше формулы получаем,

$$\eta_2 = \frac{\eta_0 - \eta_1}{1 - \eta_1}$$

$\eta_1 < \eta_0$, так как машина 1231 при том же полученном количестве теплоты совершает меньшую работу, а $\eta_2 < \eta_0$ при всех значениях $\eta_0, \eta_1 < 1$, т.е. при всех допустимых значениях. Так как по условию $\eta_1 = (1-0,01\alpha)\eta_0$, получаем ответ:

Ответ: $\eta_2 = \dfrac{\alpha}{100-(100-\alpha)\eta_0}$; при всех.

4. Если равны наборы проекции, то координаты суммы трех векторов одинаковы, т. е. суммарная сила (если только она не равна нулю) направлена под углом $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, k — целое. При этом ввиду симметрии векторов относительно $5x$, где $x = \dfrac{\pi t}{8}$, эта сила направлена вдоль $5x$. Поэтому $5x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, т. е. $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{5}$. Прямой проверкой (она нужна, т. к. выше было необходимое, но недостаточное условие) убеждаемся, что $x = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{\pi k}{5}$ подходит, т. к. выполнено $3x + 7x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$). Случай, когда суммарная сила равна нулю означает, что $2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ($2x$ это угол между векторами). Проверка показывает, что такие не подходят.

Проверяя неравенство $1 \le t \le 3$ получаем единстенный ответ $t = 2$.

Ответ: 13:00.

5. Сравним первую половину и третью четверть пути. Разобьем оба участка на равное большое количество (N) одинаковых отрезков. Длины этих отрезков столь малы, что можно считать скорость на каждом отдельном отрезке постоянной. Отрезки на первом участке пути вдвое длиннее, чем на втором. Рассмотрим участки с номером i. Концы этих отрезков имеют координаты $x_1 = iL/(2N)$ и $x_2 = L/2 + iL/(4N)$, координата откладывается от начала торможения в сторону движения, L — длина тормозного пути. Зависимость скорости от координаты имеет вид $v(x) = v_0(1 - x/L)$. Видно, что $v(x_1) = 2v(x_2)$, поэтому время, затраченное на прохождение двух отрезков с одинаковыми номерами одинаково. Следовательно, третья четверть пути будет пройдена за то же время, что и первая половина. Искомое время составит 2τ.

Ответ: 2τ

6. График функции $x(t)$ — кубическая парабола, то есть с любой горизонтально прямой имеет не более трех точек пересечения. Выясним относительное расположение графика $x(t)$ и прямой $x = 1$, чтобы понять найдется ли такой отрезок времени длиннее 2,5 секунд, что $x(t) \geq 1$.

При больших по модулю отрицательных t $x(t)$ — большое по модулю положительное, при больших положительных t $x(t)$ отрицательно. Кроме того $x(0) = 0$. Заметим, что $x(1) > 1$, $x(3,5) > 1$. Указанные оценки показывают с учетом непрерывности функций , что имеется одно пересечение графика $x(t)$ и $x = 1$ на участке $(-\infty; 0)$, одно на участке $(0; 1)$, одно на участке $(3,5; \infty)$. Так точек пересечения линий не больше трех, на отрезке $[1; 3,5]$ кубическая парабола не пересекает прямую и, следовательно, лежит выше нее. Таким образом, в это время снайпер успеет прицелиться и выстрелить.

Ответ: успеет.