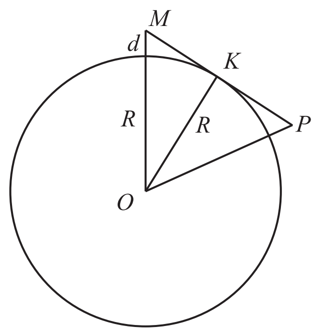
1. Обозначим M, P, O — точки, в которых находится матрос, пиратский флаг и центр Земли соответственно. Пусть R — радиус Земли, d — расстояния от матроса и флага до водной глади (они по условию равны). В первый момент, когда матрос увидит флаг, прямолинейный луч света от флага попадет в матроса. Для матроса флаг кажется на одном уровне с горизонтом, поэтому данный луч будет касательным к поверхности моря, как показано на рисунке. Треугольник MOP равнобедренный с боковыми сторонами $R+d$, так как конструкции кораблей одинаковы. Следовательно, медиана этого треугольника OK делит его на два прямоугольных треугольника. По теореме Пифагора для треугольника MOK находим



К задаче 1

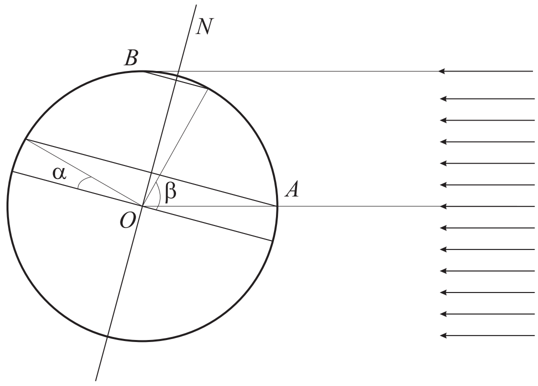
$$\frac{MP}{2} = MK = \sqrt{(R+d)^2 - R^2} = \sqrt{2Rd + d^2} \approx \sqrt{2Rd}.$$

Отсюда искомое расстояние

$$MP \approx 2\sqrt{2Rd} \approx 55 \text{ км}.$$

Ответ: 55 км.

2. Согласно определению, тропики — крайние окружности на поверхности планеты, параллельные экватору, на которых Солнце бывает в зените (лучи падают отвесно), а полярные круги — крайние окружности на поверхности планеты, параллельные экватору, на которых Солнце не заходит за горизонт во время полного оборота планеты вокруг своей оси.



К задаче 2

Рассмотрим момент, когда Солнце находится в зените над северным тропиком (точка A). Это значит, что луч света от Солнца, проходящий через точку A попадает в центр планеты O. Рассмотрим лучи, падающие на поверхность планеты севернее точки A. Крайний луч попадает в точку B. Видно, что на меридиане, содержащем точку B, она является крайней, для которой Солнце не зашло над горизонтом, то есть, принадлежит полярному кругу. Таким образом, видно, что широты тропиков α и полярных кругов β связаны простым соотношением:

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$

Для рассматриваемой планеты $\beta = 75^\circ$.
Ответ: 75°.

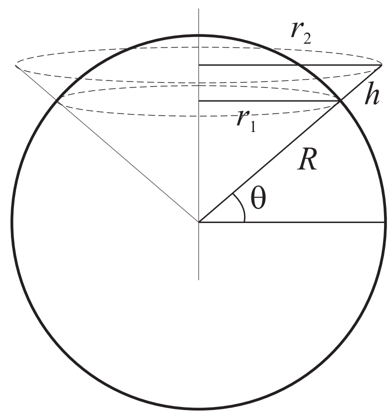
3. Траектории нижней и верхней точек мобильного робота — окружности радиусами r_1 и r_2, как показано на рисунке. По определению понятия широты

$$r_1 = R\cos\theta, \quad r_2 = (R+h)\cos\theta,$$

где R — радиус Земли. Разность длин траекторий есть $s = 2\pi r_2 - 2\pi r_1 = 2\pi h\cos\theta$, что равно h по условию задачи. Отсюда получаем

$$\theta = \arccos\frac{1}{2\pi} \approx 81^\circ.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{2\pi} \approx 81^\circ$.



К задаче 3

4. Предложим конкретный вариант. Разделим 1 л холодной воды на две части по 0,5 л. Одну часть нагреем, приведя ее в контакт с 1 л сточных вод. Из уравнения баланса тепла получим, что установится равновесная температура $66,(6)^\circ C$. Нагретую чистую воду отольем в отдельную посуду. Другую часть холодной воды приведем в контакт с 1л сточных вод, у которой теперь уже температура $66,(6)^\circ C$. В этом случае установится температура $44,(4)^\circ C$. Нагретые до этой температуры 0,5л чистой воды в ту же посуду. В результате получится смесь двух равных частей чистой воды с температурами $66,(6)^\circ C$ и $44,(4)^\circ C$. Ясно, что в результате чистая вода будет иметь температуру, равную среднему арифметическому этих температур $55,(5)^\circ C$.

5. В системе отсчета, связанной с Гаврилой, шарики бросают вверх из одной точки с одинаковой скоростью с промежутком τ по времени. Введя ось y, направленную вертикально вверх с началом в точке бросания, и отсчитывая время с момента броска первого шарика, запишем уравнения движения обоих шариков:

$$y_1(t) = Ut - \frac{gt^2}{2}, \quad y_2(t) = U(t-\tau) - \frac{g(t-\tau)^2}{2},$$

причем последнее соотношение имеет отношение к задаче при $t \geq \tau$. Расстояние между шариками $s(t) = |y_1(t) - y_2(t)| = |U\tau - gt\tau + \dfrac{g\tau^2}{2}|$. Требуется найти минимум этой функции.

Если $2U \geq g\tau$ имеется значение $T = \dfrac{\tau}{2} + \dfrac{u}{g} \geq \tau$, при котором $s(T) = 0$, что, очевидно, является наименьшим расстоянием между шариками. Так как по условию промежуток τ небольшой, будем считать, что нужное неравенство выполнено.

В рассматриваемой системе отсчета Глафира удаляется от места броска и линии, вдоль которой летают шарики со скоростью V, поэтому к моменту встречи шариков расстояние между ней и шариками будет равно $VT = V\left(\dfrac{\tau}{2} + \dfrac{u}{g}\right)$.

Ответ: Минимальное расстояние 0, на расстоянии $V\left(\dfrac{\tau}{2} + \dfrac{u}{g}\right)$ от Глафиры.

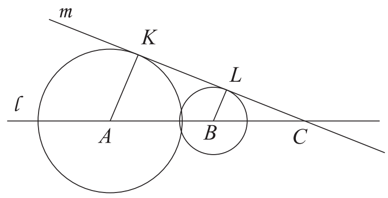
6. Из подобия прямоугольных треугольников AKC и BLC, образованных отрезками касательной, прямой l и радиусами AK и BL, проведенными в точки касания в момент времени T получим

$$\frac{aT}{aT - R} = \frac{L + x}{x},$$

где через x обозначено расстояние BC.

Из указанного уравнения найдем $x = aT\dfrac{L}{R} - L$. Отсюда скорость движения точки C пересечения прямых $a\dfrac{L}{R}$.

Отметим, что данная картина моделирует распространение возмущений от точечного источника, движущегося в среде со сверхзвуковой скоростью.



К задаче 6

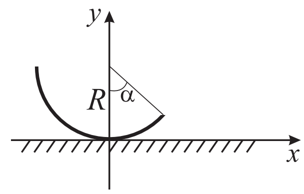
Ответ: $a\dfrac{L}{R}$.

7. Введем систему координат с началом в точке соприкосновения желоба и плоскости как показано на рисунке. Начальную скорость свободного падения шарика найдем из закона сохранения энергии $V = \sqrt{2gr\cos\alpha}$. Свободное падение шарика описывается следующими уравнениями.

$$x(t) = R\sin\alpha + V\cos\alpha t, \quad y(t) = R(1-\cos\alpha) + V\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}.$$

Время полета T найдем из квадратного уравнения $y(T) = 0$:

$$T = \sqrt{\frac{2R}{g}}\left[\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha} + \sqrt{1-\cos^3\alpha}\right].$$



К задаче 7

Отсюда найдем искомую координату точки падения:

$$x(T) = R\left[sin\alpha + \sin 2\alpha + \sqrt{\cos\alpha\,(1-\cos^3\alpha)}\right].$$

Ответ: $R\left[sin\alpha + \sin 2\alpha + \sqrt{\cos\alpha\,(1-\cos^3\alpha)}\right]$.

8. Достроим трапецию $ABCD$ до треугольника. Пусть точка пересечения боковых сторон — точка K. Проведем в треугольнике AKD медиану KP. Ясно, что центр масс треугольника AKD лежит на медиане KP в точке N. На этой же прямой в точке L лежит центр масс маленького треугольника BKC. Значит, центр масс трапеции лежит на этой же прямой (в точке O). Введем обозначения $AD : BC = k$ — известное число. Положим медиану треугольника BKC равной 1 ($KM = 1$). Тогда $KP = k$, $KL = 2/3$, $KN = \frac{2}{3}k$. Обозначим $NO = x$. Рассмотрим равновесие треугольника AKD относительно точки N как фигуры, состоящей из треугольника BKC и трапеции $ABCD$. Уравнение моментов относительно точки N с учетом однородности конструкции будет выглядеть следующим образом:

$1 \cdot LN - (k^2-1)NO = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}(k - 1 = (k^2-1)x) \Rightarrow x = \frac{2}{3(k+1)}$

Определим отношение, в котором точка O (центр масс трапеции) делит отрезок MP.

$MO : OP = (MN + x) : (NP - x) = \dfrac{2k^2-k-1}{k^2+k-2} = \dfrac{2k+1}{k+2}$

Рассмотрим один из вариантов возможного закрепления трапеции, например, за вершину B. Тогда линия отвеса пройдет через точки B и O и пересечет основание AD в точке Q. Из подобия треугольников BMO и PQO следует:

$BM : PQ = (2k+1) : (k+2)$

Тогда можно выяснить в каком отношении точка Q делит основание AD

$AQ : QD = (BM \cdot k + PQ) : (BM \cdot k - PQ) = (\frac{2k+1}{k+2} \cdot k + 1) : (\frac{2k+1}{k+2} \cdot k - 1) = \frac{k^2+k+1}{k^2-1}$

Отсюда будем иметь $AQ : AD = \frac{k^2+k+1}{2k^2+k}$.

Теперь уже можно определить отношение площадей:

$S_{ABQ} : S_{AKD} = \frac{AQ}{AD} \cdot \frac{AB}{AK} = \frac{k^2+k+1}{2k^2+k} \cdot \frac{k-1}{k}$

Если принять площадь треугольника BKC за 1, то площадь треугольника AKD будет равна k^2, а площадь трапеции $k^2 - 1$.

Тогда из предыдущей формулы получим: $S_{ABQ} = \frac{(k^2+k+1)(k-1)}{2k+1} \Rightarrow S_{ABQ} : S_{ABCD} = \frac{(k^2+k+1)(k-1)}{2k+1} : (k^2-1) = \frac{k^2+k+1}{2k^2+3k+1}$

Отсюда получим ответ: $S_{ABQ} : S_{BCDQ} = \frac{k^2+k+1}{2k^2+3k+1}$

9. Согласно первому закону термодинамики

$$Q = \Delta u + A,$$

где Q — количество теплоты, Δu — изменение внутренней энергии, A — работа, совершенная газом. В нашем случае

$$Q = 0, \quad \Delta u = c_v(T - T_0), \quad A = \frac{kx^2}{2},$$

где x — смещение поршня, k — жесткость пружины, T — температура газа после расширения. Пусть P – давление газа после расширения, S – площадь сечения. Тогда $kx = PS$, а изменение объема газа равно $\Delta V = Sx$. Поскольку объем увеличился в n раз, то после расширения он стал равным $V = \frac{n}{n-1}Sx$. Воспользуемся уравнением состояния одного моля идеального газа $PV = RT$ и получим

$$P\frac{n}{n-1}Sx = RT, \quad kx^2 = \frac{n-1}{n}RT, \Rightarrow A = \frac{kx^2}{2} = \frac{n-1}{n}\frac{RT}{2}.$$

Подставляя в выражение первого закона термодинамики изменения внутренней энергии и работы, получим

$$c_v(T - T_0) = -\frac{n-1}{n}\frac{RT}{2} \Rightarrow T = \frac{T_0}{1 + \dfrac{(n-1)R}{2nc_v}}.$$

В исходном и в расширенном положении уравнение состояния газа можно представить в форме

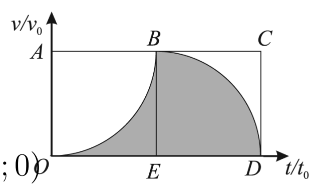
$$P_0V_0 = RT_0, \quad PnV_0 = RT.$$

Поделив второе на первое, получим:

$$\frac{P}{P_0} = \frac{T}{nT_0} = \frac{1}{n\left(1 + \dfrac{(n-1)R}{2nc_v}\right)}.$$

Ответ: $P_0\dfrac{1}{n\left(1 + \dfrac{(n-1)R}{2nc_v}\right)}$.

10. Направим ось x вдоль прямой, по которой движется точка. График зависимости $v_x(t)$ представлен на рисунке. При этом по осям отложены безразмерные величины v/v_0 и t/t_0. В данном случае график представляет собой две дуги окружностей единичного радиуса, то есть точки A, B, C, D, E имеют координаты $(0;1), (1;1), (2;1), (2;0), (1;0)$ соответственно. Для определения перемещения необходимо найти площадь фигуры, ограниченной графиком $v(t)$ осью абсцисс (она показана серым цветом). Заметим, что криволинейный треугольник OBE равен криволинейному треугольнику BDC, так как оба этих треугольника получаются вырезанием четверти круга единичного радиуса из квадрата со стороной 1. Следовательно, площадь «серой» фигуры равна площади квадрата $BCDE$, то есть 1. Чтобы перестроить график в исходных координатах (v, t) растянем плоскость вдоль оси t в t_0 раз и вдоль оси v в v_0 раз. При этом единичный квадрат перейдет в прямоугольник со сторонами t_0 и v_0, а его площадь, то есть перемещение, будет v_0t_0.



К задаче 10

Ответ: v_0t_0.