Решения.

1. Пусть при первом равновесии расстояния от карандаша до мяча и до гири были равны l_1 и l_2 соответственно. Обозначим величину первого сдвига через x, а суммарный сдвиг за два раза через y. Тогда три условия равновесия рычага будут иметь вид:

$$Ml_1 = ml_2$$
$$M(l_1 + x) = 2m(l_2 - x)$$
$$M(l_1 + y) = 3m(l_2 - y)$$

Вычитая первое уравнение из второго и третьего получим:

$$Mx = ml_2 - 2mx$$
$$My = 2ml_2 - 3my$$

Отсюда

$$M = \frac{3y - 4x}{2x - y} m = 600 \text{ г.}$$

В варианте про футбольный мяч формула та же, ответ 450 г.

2. Пусть h — глубина колодца, g — ускорение свободного падения, τ — промежуток, в течение которого крышка открыта. Данные подобраны так, что $h/(g\tau^2) = 1$

Заметим, что слишком долго подниматься шарик из колодца не может. Наибольшее время подъема $\sqrt{2h/g} = \tau\sqrt{2}$. Поэтому шарик может вылететь только в течение первого открытия крышки с момента запуска шарика. Скорость не должна быть слишком большой, чтобы крышка успела открыться к моменту долета шарика $(\tau/2)$, выберем ось y направленную вверх с нулем на уровне крышки:

$y(\tau/2) = -h + V_{max}\frac{\tau}{2} - \frac{g\tau^2}{8} = 0.$

Понятно, что чем больше скорость, тем позже шарик вернется. При $V_{max} = g\tau\left(\frac{2h}{g\tau^2} + \frac{1}{4}\right)$ он упадет на крышку в момент времени $t = 4\tau$. Заметим, что в этот момент крышка закрыта. Таким образом, при разных начальных скоростях шарик может упасть на крышку в моменты времени $T \in (\frac{3}{2}\tau; \frac{5}{2}\tau) \cup (\frac{7}{2}\tau; 4\tau)$.

Найдем соответствующие значения $\frac{V}{g\tau} \in \left(\frac{2}{3}\frac{h}{g\tau^2} + \frac{3}{4}, \frac{2}{5}\frac{h}{g\tau^2} + \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{2}{7}\frac{h}{g\tau^2} + \frac{7}{4}, 2\frac{h}{g\tau^2} + \frac{1}{4}\right)$

Так как $\frac{h}{g\tau^2} = 1$ получаем ответ: $\frac{V}{g\tau} \in \left(\frac{17}{12}, \frac{33}{20}\right) \cup \left(\frac{57}{28}, \frac{9}{4}\right)$.

Варианты:

1. $V \in \left(\frac{85}{6}, \frac{33}{2}\right) \cup \left(\frac{285}{14}, \frac{45}{2}\right)$
2. $V \in \left(\frac{85}{12}, \frac{33}{4}\right) \cup \left(\frac{285}{28}, \frac{45}{4}\right)$
3. $V \in \left(\frac{85}{3}, 33\right) \cup \left(\frac{285}{7}, 45\right)$
4. $V \in \left(\frac{170}{3}, 66\right) \cup \left(\frac{570}{7}, 90\right)$

3. Докажем, что PV диаграмме был изображен прямоугольник. Действительно, все прямые линии, кроме вертикальных в координатах PV описываются уравнением $P = \alpha V + \beta$. При этом $T = \frac{1}{\nu R} V(\alpha V + \beta)$. Это уравнение описывает в координатах VT прямую только если, $\alpha = 0$. Заметим, что линии $V = \text{const}$ также прямые в VT координатах. (Для PV и PT координат доказательство аналогично).

Единственная диагональ, которая может быть параллельна оси координат, показывает, что температура в двух вершинах одинакова. Таким образом, известно, что в PV координатах процесс изображается прямоугольником. Заданы температуры двух противоположных вершин, и известно, что температура двух других вершин одинакова.

Пусть стадии процесса описываются уравнениями $V = V_1$, $p = p_1$, $V = V_2$, $p = p_2$. Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для вершин:

$p_1V_1 = \nu R(t_1 + 273)$, $p_1V_2 = \nu R(t + 273)$, $p_2V_2 = \nu R(t_2 + 273)$, $p_2V_1 = \nu R(t + 273)$.

Умножив первое уравнение на третье, а второе на четвертое и приравняв правые части полученных уравнений получим

$t = \sqrt{(t_1 + 273)(t_2 + 273)} - 273$.

Варианты:

1. $33°C$
2. $69°C$
3. $\approx 87°C$
4. $50°C$

4. Записав разложение многочлена на множители: $t^3 - ct^2 + 350t - 1000 = (t - t_1)(t - t_1)(t - t_1)$, где t_1, t_2, t_3 — корни многочлена, получим:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = c \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 350 \\ t_1t_2t_3 = 1000. \end{cases}$$

Свойство геометрической прогрессии: $t_2^2 = t_1t_3$. Тогда $t_2^3 = 1000$, $t_2 = 10$.

Далее подставляя t_2 в уравнение, находим $c = 35$. Поэтому

$$\begin{cases} t_1 + t_3 = 25 \\ t_1t_3 = 100. \end{cases}$$

Отсюда $t_1 = 20$, $t_3 = 5$. Значит, следующий интервал времени равен $2,5$ года. Ответ: Через 2,5 года.

Варианты:

Вариант 2. Через 27 лет.

Вариант 3. Через 40 лет.

Вариант 4. Через 1/3 года (или 4 месяца).

5. Колебания шарика состоят из двух этапов: в воде и в воздухе. Когда шарик попадет в воду, на шарик начинает действовать постоянная сила Архимеда, которая не изменяет частоту колебаний пружинного маятника, но смещает положение равновесия.

При входе в воду пружина растянута на mg/k, а в положении равновесия (с учетом сила Архимеда) на $mg(1 - \rho_0/\rho)/k$. Таким образом, растяжение пружины составляет $\dfrac{mg}{k}\dfrac{\rho_0}{\rho}$.

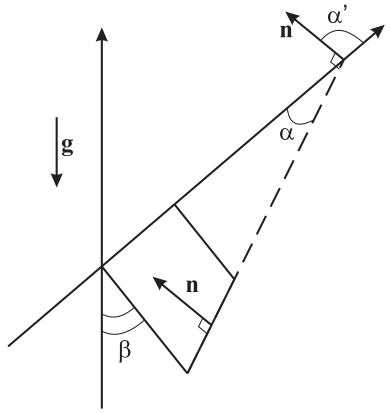
Колебания описываются уравнением $x = A\cos(\omega t - \varphi)$, при этом скорость $V = -\omega A \sin(\omega t - \varphi)$, $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ Подставляя начальные условия $\left(x = \dfrac{mg}{k}\dfrac{\rho_0}{\rho}, V = v\right)$. Отсюда $\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{kv\rho}{\omega mg\rho_0} = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{v\rho}{g\rho_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)$.

Шарик находится в течение одного периода в воде, пока $A\cos(\omega t - \varphi) > \dfrac{mg}{k}\dfrac{\rho_0}{\rho}$, т.е. $0 < t < \dfrac{2\varphi}{\omega}$. В воздухе шарик проводит половину периода колебаний пружинного маятника.

Ответ: $\sqrt{\dfrac{m}{k}}\left[\pi + 2\mathrm{arctg}\left(\dfrac{v\rho}{g\rho_0}\sqrt{\dfrac{k}{m}}\right)\right]$

Во всех вариантах ответ одинаковый.

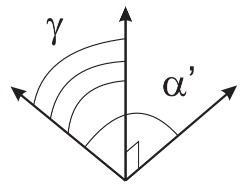
6. Продолжим линию, соединяющую основание стержней до пересечения с ось качелей. Между ними постоянный угол α, не зависящий от угла отклонения качелей. Нормаль к сиденью при любом угле отклонения образует угол $\pi/2+\alpha$ с осью качелей (см. рис. слева)



При предельном угле отклонения угол между нормалью к сиденью и вертикалью есть угол трения, определяемый соотношением $\mathrm{tg}\gamma=\mu$, откуда $\cos\gamma=1/\sqrt{1+\mu^2}$, $\sin\gamma=\mu/\sqrt{1+\mu^2}$.

Рассмотрим трехгранный угол, образованный нормалью к сиденью, восходящей вертикалью, и осью качелей (см. рис. справа).

В нем известны все три плоских угла: между нормалью к сиденью и осью качелей $(\pi/2+\alpha)$, между нормалью и вертикалью (γ) и между ось и вертикалью $(\pi/2)$. Требуется найти двугранный угол β между вертикальной плоскостью и плоскостью качелей (нормали к сиденью и оси). Против него лежит угол γ. По теореме косинусов для трехгранных углов



$$\cos\gamma=\cos\alpha'\cos\pi/2+\sin\alpha'\sin\pi/2\cos\beta.$$

Отсюда $\cos\beta=\cos\gamma/\sin\alpha'=\cos\gamma/\cos\alpha$,

$$\beta=\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}\cos\alpha}\right)=\arccos\left(\frac{\sqrt{d^2+a^2}}{\sqrt{1+\mu^2}d}\right).$$

Отметим, что ответ определен, если $\cos\gamma\le\cos\alpha$, т.е. $\alpha\le\gamma$, а это условие выполнено, в силу того, что по условию в нижнем положении качелей кукла удерживалась на сиденье силами сухого трения.