

Задания очного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике 2016/17

10—11 классы

1. В Интернете была опубликована промежуточная таблица одного футбольного турнира:

	Игры	Побед	Ничьих	Поражений	Забито мячей	Пропущено мячей	Очки
Венгрия	2	2	0	0	4	1	4
Швеция	2	1	1	0	1	1	3
Испания	2	0	2	0	3	3	2
Ирландия	3	0	1	2	3	5	1
Франция	1	0	0	1	0	2	0

Докажите, что в таблице имеется ошибка, и, зная, что ошибка одна, исправьте ее и укажите результаты сыгранных матчей.

Решение

Количество забитых и пропущенных мячей должно совпадать. Согласно таблице забитых мячей – 11, а пропущенных – 12. Значит ошибка в одном из этих двух столбцов. Заметим, что у Швеции одна победа и одна ничья. Ничья дает равный вклад в забитые и пропущенные мячи. Для победы необходимо, чтобы забитых мячей было хотя бы на один больше. А так как разница между общим количеством забитых и пропущенных мячей равна единице, то возможны два варианта:

	Забито мячей	Пропущено мячей
Швеция	2	1

либо

	Забито мячей	Пропущено мячей
Швеция	1	0

Последний вариант исключается сравнением с другими играми.

2. Однажды солнечным днём учащийся 11 класса Юра заметил на небе двигающуюся точку – летящий вдалеке самолёт. Старшеклассник решил поэкспериментировать: взял спичку и попробовал заслонить спичечной головкой летящий самолёт. Юра смог это сделать держа спичку в вытянутой

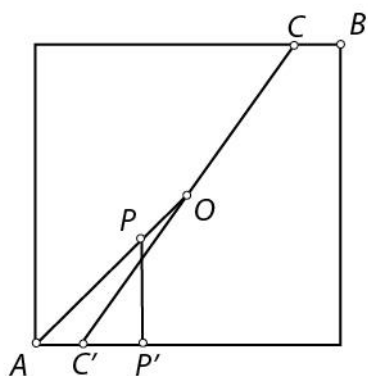
руке. Ночью он решил повторить эксперимент, но теперь с Полярной звездой. Получится ли у Юры заслонить звезду?

Решение

Ярким днём глазной зрачок сужается до размера меньше спичечной головки, а ночью – сильно расширяется. Так как лучи света, идущие от далекой звезды, можно считать параллельными, полностью они не перекрываются спичечной головкой. Часть лучей попадает в зрачок, создавая вокруг спичечной головки светящийся ореол.

3. В центре квадратного пруда плавает робот-шпион. К вершине квадрата подошел Самоделкин и заметил шпиона. Самоделкин не умеет плавать, но бежит в 4 раза быстрее, чем робот-шпион плавает. Робот-шпион бежит быстрее Самоделкина. Сможет ли он убежать от Самоделкина?

Решение



Пусть первоначально Самоделкин находился в точке В, а робот-шпион – в точке О. Робот-шпион должен двигаться из точки О по прямой в точку А. Точкой Р отмечено текущее положение робота-шпиона, а точка Р' – проекция точки Р на нижнюю сторону квадрата. В какой-то момент Самоделкин начнет двигаться вдоль стороны квадрата, пусть это будет верхняя сторона. Точка С – текущее положение Самоделкина, а точка С' – точка симметричная точке С относительно центра пруда – точки О. Так как точка Р' движется в сторону точки А, а точка С' – от точки А, в какой-то момент они совпадут. Тогда робот-шпион меняет направление движения и двигается по прямой РР'. Ему нужно проплыть расстояние меньше половины стороны квадрата. Самоделкину нужно преодолеть путь от точки С до точки С', который всегда равен по длине двум сторонам квадрата. Таким образом робот-шпион сможет добраться до берега быстрее Самоделкина и убежать от него.

4. Рассмотрим два математических маятника разной длины, подвешенные в одной и той же точке O . Каждый такой маятник представляет собой безмассовый стержень, на конце которого крепится материальная точка. Трение в точке подвеса учитывать не будем. Отклоним маятники от нижнего положения равновесия на один и тот же произвольный угол и будем удерживать их в этом состоянии. Затем одновременно отпустим маятники, не сообщив им какой-либо начальной скорости. У какого из маятников, короткого или длинного, будет больше (по абсолютной величине) угловая скорость в процессе его колебаний при равных углах отклонения от вертикального положения?

Решение

Кинетическая энергия E_k маятника длиной l с материальной точкой массы m на конце равна:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2l^2.$$

Здесь $v = \omega l$ - скорость материальной точки, ω – угловая скорость маятника. Его потенциальная энергия E_p равна:

$$E_p = -mgl \cos \varphi,$$

где g – ускорение свободного падения, а φ – угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия. Полная энергия маятника E равна сумме кинетической энергии E_k и потенциальной E_p :

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2l^2 - mgl \cos \varphi.$$

В начальный момент времени полная энергия маятника E_0 равна потенциальной E_{p0} :

$$E_0 = E_{p0} = -mgl \cos \varphi_0,$$

где φ_0 – угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия в начальный момент времени.

Полная энергия маятника во время его движения не изменяется, следовательно, при любом угле φ отклонения от вертикали имеет место равенство:

$$\frac{1}{2}ml^2\omega^2 - mgl \cos \varphi = -mgl \cos \varphi_0, \text{ или } \frac{1}{2}l\omega^2 - g \cos \varphi = -g \cos \varphi_0.$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\omega^2 = \frac{2g(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}{l}. \quad (*)$$

Колебания маятника происходят в диапазоне $-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. При $\varphi = \pm \varphi_0$ угловая скорость маятника $\omega = 0$. В диапазоне $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$ эта скорость $\omega \neq 0$. В этом диапазоне, естественно, $\cos \varphi > \cos \varphi_0$. Из формулы (*) следует, что при каждом значении φ бóльшую (по абсолютной величине) угловую скорость будет иметь тот маятник, у которого длина l меньше, т.е. более короткий.