

# Задания для заочного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике – 2016

## 10—11 классы (1 тур)

1. Учитель задал на уроке замысловатую задачу. В результате, количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равным количеству девочек, не решивших эту задачу. Кого в классе больше – решивших эту задачу или девочек?

### Решение.

Разобьем класс по признаку

«мальчик—девочка» и «решивший задачу – не решивший задачу».

Мальчики, решившие задачу	Девочки, решившие задачу
Мальчики, не решившие задачу	Девочки, не решившие задачу

Количество девочек = Девочки, решившие задачу + Девочки, не решившие задачу =  
= Девочки, решившие задачу + Мальчики, решившие задачу =  
= Количество решивших задачу.

Как видно, количество девочек совпадает с количеством решивших задачу.

2. В каждой клетке таблицы 3x3 стоит одно из трех чисел: -1, 0, 1. Докажите, что если посчитать суммы чисел в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из больших диагоналей (то есть диагоналей, соединяющих угловые клетки), то хотя бы две из этих сумм окажутся равны.

### Решение.

Максимальная сумма равна {3}, а минимальная – {-3}. Суммы могут принимать значения:  
{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3}.

Всего сумм 8: три – по вертикали, три – по горизонтали и две – по диагоналям. Так как значений, которые могут принимать эти суммы всего 7, то две из них будут совпадать.

3. Жильцы всех квартир, выходящих на одну лестничную клетку, решили прикрепить к своим дверям новые номера квартир. Кооператив, в который они обратились с просьбой изготовить необходимые 7 цифр, объявил, что он берет за изготовление каждой цифры столько рублей, какова эта цифра (нули изготавливаются бесплатно). Жильцы собрали по 3 рубля с квартиры, и им этого хватило. Какие цифры были заказаны?

### Решение.

Рассмотрим вариант, при котором квартиры имеют однозначные номера, тогда их семь штук, и стоимость номерков составила  $7 \times 3 = 21$  рубль. Номер первой квартиры на лестничной клетке либо 1, либо 2, либо 3. В любом из этих трёх вариантов, жильцы квартир с номерами

{3, 4, 5, 6, 7}

участвуют в покупке. Но стоимость номерков для этих пяти квартир составляет 25 рублей, что превышает 21 рубль. Таким образом такой вариант невозможен.

Вариант только с двузначными квартирами и вариант только с трехзначными квартирами невозможен потому, что в них требуется четное число номерков, а по условию задачи номерков семь. Значит в номерах квартир происходит переход разряда.

Вариант {99, 100, 101} не подходит – для него нужно восемь цифр.

Вариант {98, 99, 100} не подходит, так как стоимость номерков по минимуму составит 27 рублей. Здесь нужно заметить, что цифры 6 и 9 отличаются поворотом на  $180^\circ$ , поэтому для квартиры, в номер которой входит цифра 9, дешевле покупать цифру 6.

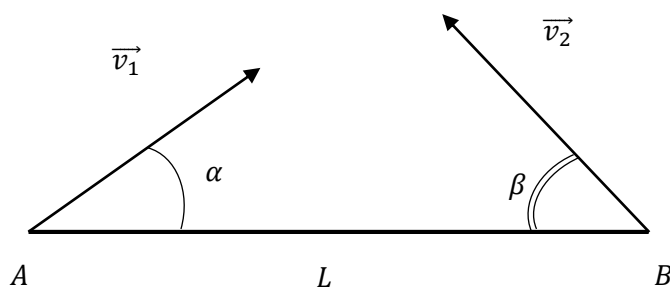
Рассмотрим варианты, при которых первая квартира на лестничной клетке имеет однозначный номер. Заметим, что когда этот номер четный, на однозначные квартиры потребуется четное число цифр.

Вариант {5, 6, 7, 8, 9, 10} – первые четыре цифры уже в сумме превосходят  $6 \times 3 = 18$ .

Вариант {7, 8, 9, 10, 11} – обойдется либо в 24 рубля (цифру 9 купили как 6), либо в 27 рублей, что больше  $5 \times 3 = 15$ .

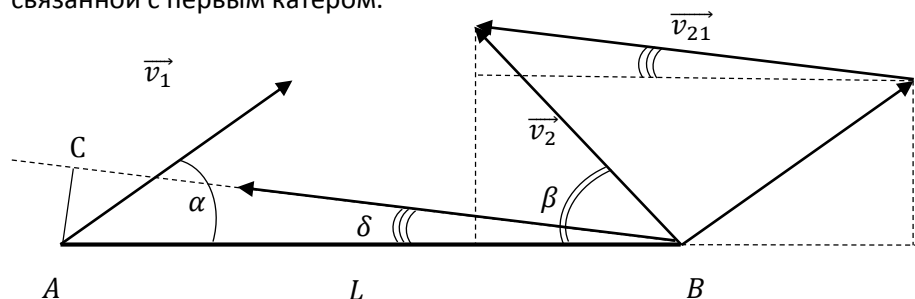
Вариант {9, 10, 11, 12} – обойдется в 12 рублей (цифру 9 купили как 6), как раз по 3 рубля с четырёх квартир.

4. Из двух портов **A** и **B**, расстояние между которыми равно  $L$ , одновременно выходят два катера, один из которых плывет со скоростью  $\vec{v}_1$ , а второй – со скоростью  $\vec{v}_2$ . Направление движения первого катера составляет с линией **AB** угол  $\alpha$ , а второго – угол  $\beta$ . Каким будет наименьшее расстояние  $S$  между катерами?



**Решение.**

Рассмотрим движение второго катера в подвижной относительно Земли системе координат, связанной с первым катером.



В этой системе координат скорость второго относительно первого будет равна  $\vec{v}_{21}$ . Модуль этой скорости равен

$$v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2 \cos(\alpha + \beta)}.$$

Минимальное расстояние между катерами равно длине перпендикуляра **AC**, опущенного из точки **A** на траекторию второго катера:

$$AC = L \sin \delta,$$

где

$$\sin \delta = \frac{|v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha|}{v_{21}}.$$

Ответ:

$$S = \frac{L|v_2 \sin \beta - v_1 \sin \alpha|}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos(\alpha + \beta)}}.$$

# Задания для заочного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике – 2016

## 10—11 классы (2 тур)

1. Из ведра, содержащего 5 литров воды, отливают 1 литр, а затем вливают 1 литр сока. Перемешав все это, из ведра отливают 1 литр смеси, затем в ведро опять вливают 1 литр сока. Опять перемешивают, отливают 1 литр смеси и вливают 1 литр сока. Сколько в ведре после этого останется воды?

### Решение.

1.  $5-1=4$
  2.  $4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$
  3.  $\frac{16}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{25}$
2. Можно ли ходом коня обойти шахматную доску, из которой вырезаны две противоположные угловые клетки, побывав при этом на каждом из полей ровно один раз? Ответ объясните.

### Решение.

Предположим, что можно обойти конём шахматную доску с вырезанными противоположенными угловыми клетками, побывав при этом на каждом из полей один раз. При каждом ходе коня изменяется цвет клетки под ним. Так как клеток на шахматной доске с вырезанными углами чётное число, цвет клетки, на которой заканчивается обход, противоположен цвету клетки, на которой конь стоит в начале. Поэтому количество белых полей равно количеству черных полей. Но у шахматной доски с вырезанными противоположенными угловыми клетками количество белых и черных полей отличается на два. Значит исходное предположение не верно, и обойти такую доску согласно условиям задачи нельзя.

3. В каждой клетке доски  $7 \times 7$  сидит жук. По команде каждый жук переползает на одну из соседних клеток, то есть имеющих с клеткой, где он сидел, общую сторону (все жуки переползают одновременно). Докажите, что хотя бы одна из клеток окажется свободной.

### Решение.

Нанесем на доску шахматную раскраску. Соседние клетки имеют разные цвета. Предположим, что после того, как жуки переползают на соседние клетки, все клетки оказываются занятыми. Так как на доске нечетное количество клеток, полей одного цвета будет 24, а другого – на единицу больше – 25, и пусть это будут клетки черного цвета. На черные клетки переползли жуки с белых клеток, и тогда этих клеток должно быть 25. Но белых клеток 24, что означает, что исходное предположение не верно, и хотя бы одна клетка окажется свободной.

4. Турбореактивный самолёт за время  $t_0 = 1,5$  часа полёта преодолел расстояние  $S = 700$  км. Определите скорость ветра  $V_B$ , если его направление составляет угол  $\alpha = 90^\circ$  с направлением

движения самолёта относительно Земли. Скорость самолёта относительно неподвижного воздуха  $V_c = 200$  м/с.

**Решение.**

По закону сложения скоростей  $\vec{V}_{C \text{ абс}} = \vec{V}_{C \text{ отн}} + \vec{V}_B$ , откуда

$$V_B = \sqrt{V_{C \text{ отн}}^2 - V_{C \text{ абс}}^2}$$

$$V_{C \text{ абс}} = \frac{S^2}{t_0^2}$$

$$V_{C \text{ абс}} \cong 129,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}, V_B = 152,3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$