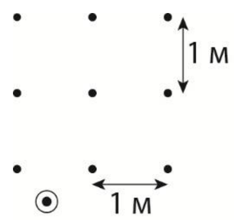
Задания для заочного тура олимпиады «Ломоносов» по робототехнике – 2014 с решениями и указаниями

10—11 классы

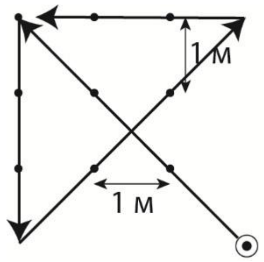
1. Робот-пылесос имеет форму цилиндра диаметром 30 см. Робот умеет совершать два маневра: двигаться по прямой и поворачиваться на месте. В комнате лежит девять шариков диаметром 1 см: три ряда по три шарика, расстояние между рядами и шариками в ряду равны 1 м (см. рисунок).



Чтобы пылесос засосал шарик, тот должен оказаться точно под центром пылесоса. Какое минимальное количество поворотов должен совершить робот-пылесос, чтобы собрать все девять шариков?

Ответ: 3.

Указание: см. рисунок.



2. Тело брошено вертикально вверх с высоты 20 м с начальной скоростью 3 м/с. На какой высоте окажется тело через 2 с после начала движения? Сопротивлением воздуха можно пренебречь, а ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: 6 м.

Решение.

Ускорение тела постоянно:

$$a(t) = -g.$$

Скорость тела меняется линейно по времени:

$$v(t) = -gt + v(0).$$

Высота, соответственно, изменяется следующим образом:

$$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + v(0)t + h(0) = -5t^2 + 3t + 20.$$

Таким образом, при $t = 2$ получаем

$$h(2) = 6.$$

3. В программе на языке Бейсик, фрагмент которой представлен ниже, описан одномерный целочисленный массив **A** с индексами от 1 до 10 и целочисленные переменные ***k***, ***i***:

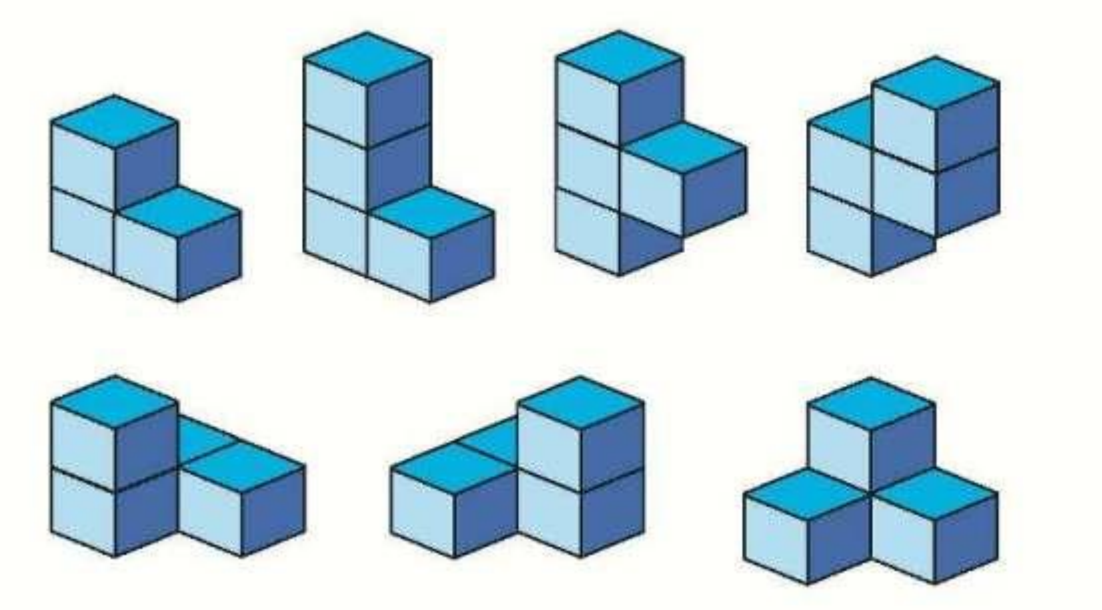
```
FOR i=1 TO 10
      A(i)=5*i
NEXT i

FOR i=1 TO 10
      k=a(i)-2
      A(10-i+1)=k
NEXT i
```

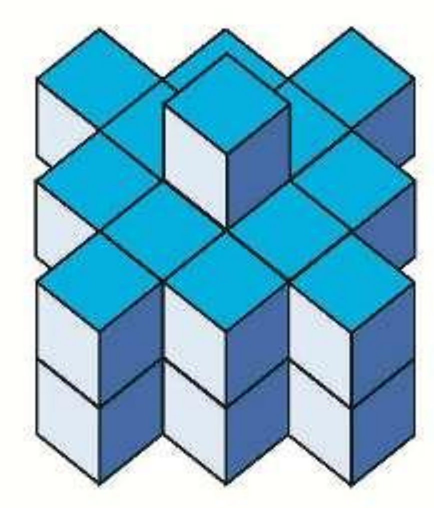
Чему будут равны элементы массива **A** после выполнения фрагмента программы?

Ответ: [1 6 11 16 21 23 18 13 8 3].

4. Саша решил запрограммировать своего робота так, чтобы он мог собирать различные фигуры из семи элементов кубиков сома.



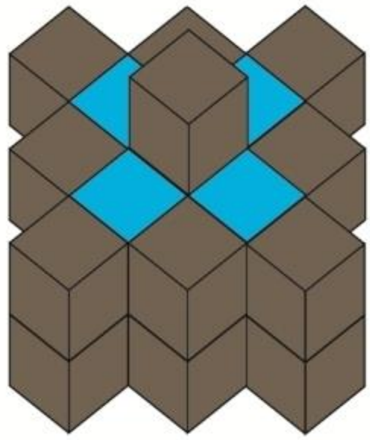
Саша быстро запрограммировал робота, чтобы он собирал куб 3x3x3. Сможет ли Саша запрограммировать робота собирать следующую фигуру?



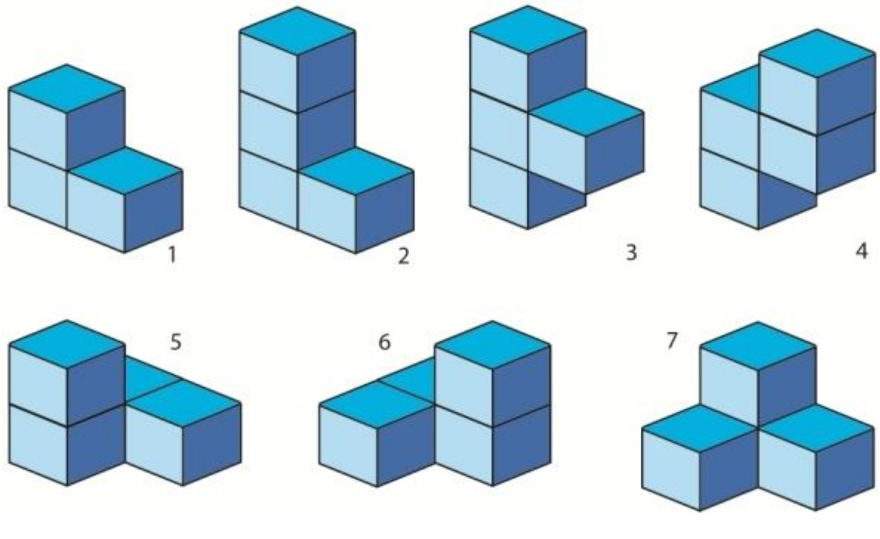
Ответ: нет, не сможет.

Решение.

Покрасим кубики, стоящие в центральном столбике и отстоящих от него по диагонали в черный цвет:



Таким образом получится, что черных кубиков – 19 штук, а синих – 8 штук.

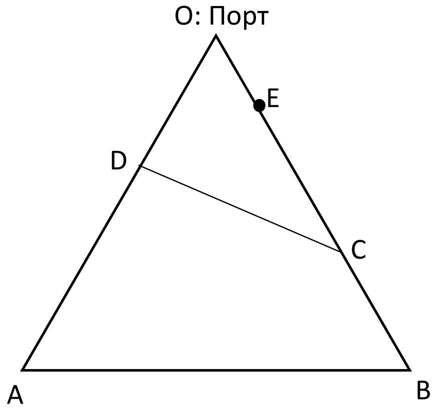


Рассмотрим какое максимальное количество черных кубиков может иметь каждый из семи элементов, если из них составлена заданная фигура, раскрашенная вышеописанным способом:

Номер элемента	1	2	3	4	5	6	7
Максимальное количество черных кубиков	2	3	3	2	3	3	2

Значит, максимальное суммарное количество черных кубиков у семи элементов равно 18, что на один меньше, чем имеет фигура.

5. Два судна движутся прямолинейно и равномерно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют равносторонний треугольник.
После того как второе судно прошло 80 км – прямоугольный треугольник. В момент прибытия первого судна в порт второму остается пройти еще 120 км. По прибытии в порт первое судно без задержки выходит на встречу второму судну, и встречается с ним через 2 часа после отбытия из порта. С первого судна в начальный момент времени запустили дрон, который летает на постоянной высоте со скоростью 50 км/ч, в направлении второго судна. Дрон запрограммирован таким образом, что, долетев до второго судна, он возвращается к первому. Долетев до первого судна, дрон снова летит ко второму и так до тех пор, пока судна не встретились. Сколько километров пролетел дрон?
Ответ: 400 км.
Решение.



Введем следующие обозначения:
точка A – стартовая точка первого судна;
точка B – стартовая точка второго судна;
точка O – порт;
таком образом треугольник ΔAOB – равносторонний;
точка C – местонахождение второго после прохождения 80 км, то есть $BC = 80$ км;
точка D – месторасположения первого судна в тот момент времени, когда второе судно находится в точке C.
Точка E – место встречи судов.
Так как скорость первого судна выше, чем у второго – по условию первое судно пришло в порт первым, то $AD > CB$ и, следовательно, $OD <$ OC. Значит у прямоугольного треугольника ΔDOC угол $\angle ODC = 90°$.

$$\angle ODC = 90°. \angle ODC = 90°$$

Обозначим за S – первоначальное расстояние между судами в км. Обозначим за v_1 скорость в км/ч движения первого судна, а за v_2 – скорость в км/ч второго судна.
Так как в прямоугольном треугольнике ΔDOC угол $\angle DOC = 60°, \text{то } OC = 2OD$. Отсюда получим уравнение:

$$S - 80 = \left(S - \frac{80}{v_2} v_1\right) 2. \ (*)$$

Из условия о прибытии в порт первого судна получим уравнение:

$$\frac{S}{v_1} = \frac{S - 120}{v_2}. \quad (**)$$

Подставив в первое уравнение отношение скоростей, выраженное из второго уравнения, получим уравнение на S:

$$S^2 - 200S - 9600 = 0.$$

У него два корня: $S = 240$ и $S = -40$. Второй корень не подходит по физическому смыслу. Таким образом $S = 240$ км. Из уравнения (**) получим $v_1 = 2v_2$. Когда первое судно вышло из порта навстречу второму, расстояние между ними составляло 120 км, учитывая, что встреча в точке *E* произошла через два часа, получаем:

$$2(v_1 + v_2) = 120.$$

Отсюда $v_1 = 40$ км/ч, $v_2 = 20$ км/ч. Время движения от выхода судов из точек *A* и *B* до встречи в точке *E* составляет

$$\frac{S}{v_1} + 2 = 8.$$

Таким образом дрон провел в движении 8 часов, учитывая скорость его движения, получаем, что дрон пролетел 400 км.