Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 5–10 классов

1.1. [5–6.1 (20 баллов)] В некоторой семье папа работает по графику «2 через 2» (2 дня работает, 2 дня выходные), мама — по графику «1 через 2» (1 день работает, 2 дня выходные), а дети учатся по пятидневной рабочей неделе (с понедельника по пятницу). В субботу 2 сентября мама навещала бабушку в деревне, а следующий день вся семья провела дома. В какой день у них снова будет общий выходной?

2.1. [5–6.2 (20 баллов), 7–8.2 (15 баллов), 9.2 (15 баллов)] Сколькими способами можно прочитать слово «РОТОР», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

Р О Т О Р	Д О Х О Д
О Т О Р	О Х О Д
Т О Р	Х О Д
О Р	О Д
Р	Д

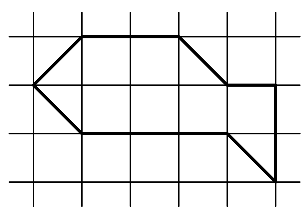
2.2. Сколькими способами можно прочитать слово «ДОХОД», двигаясь по буквам рисунка, если возвращаться по пути к пройденным буквам нельзя, а прочтения, отличающиеся только направлением, считаются одинаковыми?

3.1. [5–6.3 (20 баллов)] В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе кислота будет составлять $\frac{1}{20}$ часть, а во второй доля кислоты будет равна $\frac{7}{30}$. Какую часть будет составлять кислота в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

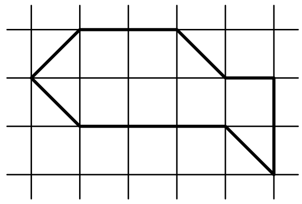
4.1. [7–8.3 (15 баллов)] В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 20 г, в третьей 30 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе концентрация кислоты будет составлять $5\,\%$, а во второй — $23\frac{1}{3}\,\%$. Какова будет концентрация кислоты в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

4.2. В трёх колбах находится концентрированная кислота: в первой 10 г, во второй 30 г, в третьей 40 г. Имеется также четвёртая колба с водой. Если некоторое количество воды из четвёртой колбы добавить в первую колбу, а остальную воду вылить во вторую колбу, то в первой колбе концентрация кислоты будет составлять $8\,\%$, а во второй — $28\frac{28}{29}\,\%$. Какова будет концентрация кислоты в третьей колбе, если вылить в неё всю воду из четвёртой колбы?

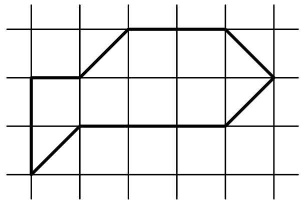
5.1. [5–6.4 (п. а) — 10 баллов, п. б) — 20 баллов)] На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Требуется разрезать её на несколько частей и сложить из них квадрат (поворачивать части можно, переворачивать нельзя). Можно ли это сделать при условии, что а) частей не больше четырёх; б) частей не больше пяти, причём все они — треугольники? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



6.1. [7–8.5 (20 баллов)] На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Можно ли разрезать её на 5 треугольников и сложить из них квадрат? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



6.2. На клетчатой бумаге изображена фигура (см. рисунок). Можно ли разрезать её на 5 треугольников и сложить из них квадрат? Если да, покажите, как это сделать, если нет — докажите, что нельзя.



7.1. [5–6.5 (п. а) — 20 баллов, п. б) — 20 баллов)] Вовочка складывает числа в столбик следующим образом: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр в одинаковых разрядах пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, для суммы $248 + 208$ он получил бы значение 4416.

а) В скольких случаях Вовочка получит правильный ответ, складывая всевозможные пары трёхзначных чисел? (Если некоторые два различных числа Вовочка уже складывал ранее в другом порядке, то он этого не замечает.)

б) Найдите наименьшую возможную разность между верным ответом и ответом Вовочки для всех остальных пар трёхзначных чисел.

8.1. [9.5 (15 баллов)] Вовочка складывает трёхзначные числа в столбик следующим образом: он не запоминает десятки, а под каждой парой цифр в одинаковых разрядах пишет их сумму, даже если она двузначна. Например, для суммы $248+208$ он получил бы значение 4416. Найдите наименьшую возможную положительную разность между ответом Вовочки и верным ответом.

9.1. [7–8.1 (15 баллов)] Найдите все решения числового ребуса АБ $=$ Б$^{\text{В}}$ (разным буквам соответствуют разные цифры; в левой части стоит двузначное число, а не произведение цифр А и Б).

9.2. Найдите все решения числового ребуса А $=$ ВА (разным буквам соответствуют разные цифры; в правой части стоит двузначное число, а не произведение цифр В и А).

10.1. [7–8.4 (15 баллов)] Найдите все a, при которых уравнение $a^2(x-2)+a(39-20x)+20=0$ имеет хотя бы два различных корня.

10.2. Найдите все a, при которых уравнение $a^2(x+2)-a(10x+21)+10=0$ имеет хотя бы два различных корня.

11.1. [7–8.6 (20 баллов)] На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите длину отрезка AN.

11.2. На биссектрисе угла ACB треугольника ABC отмечена точка N, а на продолжении стороны AC за точку C — точка M так, что $BC = CN = 2$ и $\angle CMN = \angle BMN$. Найдите длину отрезка CM.

12.1. [9.7 (15 баллов), 10.6 (15 баллов)] На биссектрисе угла BAC треугольника ABC отмечена точка M, а на продолжении стороны AB за точку A — точка N так, что $AC = AM = 1$ и $\angle ANM = \angle CNM$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника CNM.

12.2. На биссектрисе угла ACB треугольника ABC отмечена точка N, а на продолжении стороны AC за точку C — точка M так, что $BC = CN = 2$ и $\angle CMN = \angle BMN$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника BMN.

13.1. [7–8.7 (20 баллов), 9.8 (15 баллов), 10.8 (20 баллов)] Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, ..., 7, 8, 7, 6, ..., 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 1?

13.2. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, ..., 7, 8, 7, 6, ..., 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 13 вращений стола игрок номер 5 набрал в сумме 72 очка, а игрок номер 9 набрал в сумме 84 очка. Сколько очков набрал игрок номер 13?

13.3. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, ..., 7, 8, 7, 6, ..., 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку. После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 11 вращений стола игрок номер 6 набрал в сумме 78 очков, а игрок номер 10 набрал в сумме 54 очка. Сколько очков набрал игрок номер 2?

13.4. Имеется круглый вращающийся стол с 16 секторами, на которых по кругу написаны числа 0, 1, 2, ..., 7, 8, 7, 6, ..., 2, 1. За столом сидят 16 игроков, занумерованных по порядку.

После каждого вращения стола каждый игрок получает столько очков, сколько написано на секторе, за которым он оказался после остановки стола. Оказалось, что после 11 вращений стола игрок номер 6 набрал в сумме 78 очков, а игрок номер 10 набрал в сумме 54 очка. Сколько очков набрал игрок номер 14?

14.1. [9.1 (15 баллов), 10.1 (15 баллов)] Вычислите

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2017\sqrt{1+2018\cdot 2020}}}}.$$

14.2. Вычислите $\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+2018\sqrt{1+2019\cdot 2021}}}}$.

15.1. [9.3 (15 баллов)] В трапеции $ABCD$ диагональ AC равна 1 и является одновременно её высотой. Из точек A и C к сторонам CD и AB соответственно проведены перпендикуляры AE и CF. Найдите AD, если $AD = CF$ и $BC = CE$.

15.2. В трапеции $KLMN$ диагональ KM равна 1 и является одновременно её высотой. Из точек K и M к сторонам MN и KL соответственно проведены перпендикуляры KP и MQ. Найдите LM, если $KN = MQ$ и $LM = MP$.

16.1. [9.4 (15 баллов), 10.4 (15 баллов)] На графике функции $y = x + \frac{1}{x}$, где $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

16.2. На графике функции $y = x - \frac{1}{x}$, $x > 0$, найдите точку, ближайшую к началу координат.

17.1. [9.6 (15 баллов), 10.3 (15 баллов)] Найдите разложение на простые множители наименьшего натурального числа, имеющего ровно 2020 различных натуральных делителей.

[1]С учетом случая, когда несколько показателей равны между собой и соответствующие множители можно менять местами.

18.1. [10.2 (15 баллов)] Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили красной краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков хотя бы одна грань красная, а у оставшихся двух третей все грани не окрашены. Найдите длину параллелепипеда, если она на 2 см больше ширины и на 4 см больше высоты.

18.2. Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили синей краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков все грани не окрашены, а у оставшихся двух третей хотя бы одна грань синяя. Найдите высоту параллелепипеда, если она на 4 см меньше длины и на 2 см меньше ширины.

18.3. Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили зеленой краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков хотя бы одна грань зеленая, а у оставшихся двух третей все грани не окрашены. Найдите ширину параллелепипеда, если она на 2 см меньше длины и на 2 см больше высоты.

18.4. Деревянный параллелепипед, все стороны которого выражаются целым числом сантиметров, покрасили фиолетовой краской, а после этого распилили параллельно граням на кубики со стороной 1 см. Оказалось, что у трети получившихся кубиков все грани не окрашены, а у оставшихся двух третей хотя бы одна грань фиолетовая. Найдите высоту параллелепипеда, если она на 2 см меньше длины и на 2 см больше ширины.

19.1. [10.5 (15 баллов)] Докажите, что уравнение

$$\sin(2020x) + \cos(2020x) = \frac{x}{5050} + 1$$

имеет по крайней мере 8 000 корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

19.2. Докажите, что уравнение

$$\sin(1010x) - \cos(1010x) = 1 - \frac{x}{2020}$$

имеет по крайней мере 10 000 корней, принадлежащих отрезку $[-5\pi; 5\pi]$.

19.3. Докажите, что уравнение

$$\cos(2020x) - \sin(2020x) = \frac{x}{3030} + 1$$

имеет по крайней мере 16 000 корней, принадлежащих отрезку $[-4\pi; 4\pi]$.

19.4. Докажите, что уравнение

$$\cos(3030x) + \sin(3030x) = 1 - \frac{x}{2020}$$

имеет по крайней мере 12 000 корней, принадлежащих отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

20.1. [10.7 (15 баллов)] Функция f, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $f(1) + 1 > 0$;
2) $f(x + y) - xf(y) - yf(x) = f(x)f(y) - x - y + xy$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $2f(x) = f(x + 1) - x + 1$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $f(10)$.

20.2. Функция g, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $g(1) > 1$;
2) $g(x + y) + xg(y) + yg(x) = g(x)g(y) + x + y + xy$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $3g(x) = g(x + 1) + 2x - 1$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $g(5)$.

20.3. Функция f, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $f(1) > -1$;
2) $f(x)f(y) - x - y + xy = f(x + y) - xf(y) - yf(x)$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $2f(x + 1) = f(x) - x - 2$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $f(-7)$.

20.4. Функция g, заданная на множестве целых чисел, удовлетворяет условиям:

1) $g(1) - 1 > 0$;
2) $g(x)g(y) + x + y + xy = g(x + y) + xg(y) + yg(x)$ при любых $x, y \in \mathbb{Z}$;
3) $3g(x + 1) = g(x) + 2x + 3$ при любых $x \in \mathbb{Z}$.

Найдите $g(-6)$.