Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 1

1. Найдите сумму цифр числа A, если $A = 2^{63} \cdot 4^{25} \cdot 5^{106} - 2^{22} \cdot 4^{44} \cdot 5^{105} - 1$.

2. Найдите сумму цифр числа B, если $B = 2^{66} \cdot 4^{23} \cdot 5^{104} - 2^{23} \cdot 4^{43} \cdot 5^{103} - 1$.

3. Найдите сумму цифр числа C, если $C = 2^{70} \cdot 4^{21} \cdot 5^{105} - 2^{32} \cdot 4^{39} \cdot 5^{104} - 1$.

4. Найдите сумму цифр числа D, если $D = 2^{58} \cdot 4^{26} \cdot 5^{102} - 2^{16} \cdot 4^{46} \cdot 5^{101} - 1$.

24 мая 2020 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 2

1. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных гномика, а
о есть 12 разновидностей гномиков. В коробке лежит достаточ-
много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них трой-
номиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-
призов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо
залось хотя бы по одному гномику всех 12 разновидностей?

2. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных лунтика, а всего существует 13 видов лунтиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки лунтиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному лунтику всех 13 видов?

3. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных фиксика, а всего существует 14 видов фиксиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки фиксиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному фиксику всех 14 видов?

4. Каждый киндер-сюрприз содержит ровно 3 различных смурфика, а всего существует 11 видов смурфиков. В коробке лежит достаточно много киндер-сюрпризов, причем в любых двух из них тройки смурфиков не одинаковы. Какое наименьшее количество киндер-сюрпризов нужно купить, чтобы после их вскрытия в них заведомо оказалось хотя бы по одному смурфику всех 11 видов?

24 мая 2020 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 3

1. Решите неравенство $\operatorname{tg} \arccos x \quad \sin \operatorname{arctg} x$.

2. Решите неравенство $\operatorname{tg} \arccos x \quad \cos \operatorname{arctg} x$.

3. Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x > \sin \operatorname{arctg} x$.

4. Решите неравенство $\operatorname{ctg} \arcsin x + \cos \operatorname{arctg} x > 0$.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 4

1. Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Другая окружность с центром Q и радиусом 8 описана около треугольника ACO. Найдите BQ.

. Хорды AB и BC одной окружности с центром O равны по 12, а центр другой окружности, проходящей через точки B, C и O, удалён от точки A на расстояние 15. Найдите радиус второй окружности.

. Точки A и B лежат на окружности с центром O и радиусом 6, а точка C равноудалена от точек A, B и O. Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O, если её центр удален от точки A на расстояние10.

4. Хорды AB и AC одной окружности с центром O равны между собой, а центр другой окружности радиуса 8, описанной около треугольника ACO, удалён от точки B на расстояние 10. Найдите AC.

24 мая 2020 г.

Задача 5

1. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел $x^3+3x+a-9$ и $a+2^{5-x}-3^{x-1}$ положительно.

2. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел

$$2^{x-2}-3^{3-x}+a \quad \text{и} \quad a+8-x^3-x$$

отрицательно.

3. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наибольшее из двух чисел

$$x^3+x+a-7 \quad \text{и} \quad a+2^{4-x}-3^{x-2}$$

положительно.

4. Найдите все значения a, для каждого из которых при любом x наименьшее из двух чисел

$$2^{x-1}-3^{4-x}+a \quad \text{и} \quad a+5-x^3-2x$$

отрицательно.

24 мая 2020 г.

Задача 6

1. Автомобили Нива и Тойота едут по кольцевой трассе испытательного полигона, четверть которой проходит по грунтовой дороге, а оставшаяся часть — по асфальтовой. Скорость Нивы на грунтовой дороге равна 80 км/ч, а на асфальтовой — 90 км/ч. Скорость Тойоты на грунтовой дороге равна 40 км/ч, а на асфальтовой — 120 км/ч. Автомобили одновременно стартуют в начале грунтовой части трассы и сначала едут по этой грунтовой части. На каком по счёту круге один из автомобилей впервые обгонит другой?

2. Мотоцикл и квадроцикл едут по кольцевой дороге, четверть которой проходит по лесу, а оставшаяся часть — по полю. Скорость мотоцикла при движении по лесу равна 20 км/ч, а при движении по полю — 60 км/ч. Скорость квадроцикла при движении по лесу равна 40 км/ч, а при движении по полю — 45 км/ч. Квадроцикл и мотоцикл одновременно въезжают в лес. Какое из транспортных средств первым обгонит другое, и на каком по счёту круге это произойдёт?

3. Саша едет на самокате, а Галя — на гироскутере. В горку Саша едет на самокате со скоростью 8 км/ч, а под горку — со скоростью 24 км/ч. Галя на гироскутере едет в горку со скоростью 16 км/ч, а под горку — со скоростью 18 км/ч. Саша и Галя соревнуются на кольцевом треке, четверть которого составляет подъём, а остальную часть — спуск. Они одновременно трогаются вверх в начале подъёма. Кто из них первым обгонит другого, и на каком по счёту круге это произойдёт?

4. Снегоход и квадроцикл соревнуются на зимней кольцевой трассе, четверть которой покрыта рыхлым снегом, а остальная часть — плотным снегом. Снегоход едет по рыхлому снегу со скоростью 32 км/ч, а по плотному — со скоростью 36 км/ч. Квадроцикл едет по рыхлому снегу со скоростью 16 км/ч, а по плотному — со скоростью 48 км/ч. Снегоход и квадроцикл начинают движение одновременно в начале части трассы, покрытой рыхлым снегом, и сначала едут по этой части. Какое из транспортных средств первым обгонит другое, и на каком по счёту круге это произойдёт?

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 7

1. Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба (ось луча содержит главную диагональ). Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

2. Куб с ребром $a = 1/\sqrt{2}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2-\sqrt{3}}$, направленным вдоль главной диагонали куба (ось луча содержит главную диагональ). Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

3. Куб с ребром $a = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2}$, направленным вдоль главной диагонали куба (ось луча содержит главную диагональ). Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

4. Куб с ребром $a = 1$ освещается цилиндрическим лучом света радиуса $\rho = \sqrt{2-\sqrt{2}}$, направленным вдоль главной диагонали куба (ось луча содержит главную диагональ). Найдите площадь освещенной части поверхности куба.

24 мая 2020 г.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2019/2020 учебного года для 11 класса

Задача 8

1. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 5m + n$.

2. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $2k + m + 2n$.

3. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $k + 3m + n$.

4. Известно, что m, n, k — различные натуральные числа, большие 1, число $\log_m n$ рационально, и, кроме того,
$$k^{\sqrt{\log_m n}} = m^{\sqrt{\log_n k}}.$$
Найдите минимальное из возможных значений суммы $3k + m + 3n$.

24 мая 2020 г.