# Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2019/2020 учебный год
## Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями

**1.1.1.** (2 балла) Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 8, а среднее геометрическое равно $2\sqrt{5}$.

**1.1.2.** Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 9, а среднее геометрическое равно $6\sqrt{2}$.

**1.1.3.** Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 7, а среднее геометрическое равно $2\sqrt{10}$.

**1.1.4.** Найдите сумму квадратов двух чисел, если известно, что их среднее арифметическое равно 11, а среднее геометрическое равно $7\sqrt{2}$.

**1.2.1.** (2 балла) Пусть $x_1$ и $x_2$ - корни уравнения $\sqrt{14}x^2-\sqrt{116}x+\sqrt{56}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

**1.2.2.** Пусть $x_1$ и $x_2$ - корни уравнения $\sqrt{13}x^2-\sqrt{108}x+\sqrt{52}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$

**1.2.3.** Пусть $x_1$ и $x_2$ - корни уравнения $\sqrt{14}x^2+\sqrt{172}x+\sqrt{126}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

**1.2.4.** Пусть $x_1$ и $x_2$ - корни уравнения $\sqrt{13}x^2+\sqrt{172}x+\sqrt{117}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

**1.2.5.** Пусть $x_1$ и $x_2$ - корни уравнения $\sqrt{7}x^2-\sqrt{116}x+\sqrt{112}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

—

**1.2.6.** Пусть $x_1$ и $x_2$ - корни уравнения $\sqrt{11}x^2+\sqrt{180}x+\sqrt{176}=0$. Вычислите $|\frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{x_2^2}|$.

**2.1.1.** (2 балла) Найти наибольшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(6+5x+x^2)\sqrt{2x^2-x^3-x} \leqslant 0.$$

**2.1.2.** Найти наименьшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(3x-x^2-2)\sqrt{4x+4x^2+x^3} \geqslant 0.$$

**2.1.3.** Найти наименьшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(x^2+3-4x)\sqrt{6x^2+x^3+9x} \leqslant 0.$$

**2.1.4.** Найти наибольшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(2-x-x^2)\sqrt{4x^2-4x-x^3} \geqslant 0.$$

**2.1.5.** Найти наибольшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(x^2-2-x)\sqrt{6x^2-9x-x^3} \leqslant 0.$$

**2.1.6.** Найти наименьшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(7x-x^2-12)\sqrt{x+x^3+2x^2} \geqslant 0.$$

**2.1.7.** Найти наименьшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(5x - x^2 - 6)\sqrt{4x^2 + x^3 + 4x} \leqslant 0.$$

**2.1.8.** Найти наибольшее значение $x$, удовлетворяющее неравенству

$$(3 - x^2 - 2x)\sqrt{6x^2 - x^3 - 9x} \geqslant 0.$$

**3.1.1.** (12 баллов) Вычислите $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha + \cos\beta = \frac{1}{4}$ и $\cos\alpha + \sin\beta = -\frac{8}{5}$.

**3.1.2.** Вычислите $\sin(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha - \cos\beta = \frac{3}{4}$ и $\cos\alpha + \sin\beta = -\frac{2}{5}$.

**3.1.3.** Вычислите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha + \cos\beta = -\frac{4}{5}$ и $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{3}$.

**3.1.4.** Вычислите $\cos(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha - \cos\beta = -\frac{3}{5}$ и $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{7}{4}$.

**3.2.1.** (12 баллов) Уравнение $x^2+5x+1=0$ имеет корни $x_1$ и $x_2$. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{6}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{6}}{1+x_1}\right)^2.$$

**3.2.2.** Уравнение $x^2 - 5x + 1 = 0$ имеет корни $x_1$ и $x_2$. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{7}}{1+x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{7}}{1+x_1}\right)^2.$$

**3.2.3.** Уравнение $x^2 + 7x + 1 = 0$ имеет корни $x_1$ и $x_2$. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{3\sqrt{3}x_1}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}x_2}{1-x_1}\right)^2.$$

**3.2.4.** Уравнение $x^2 - 7x + 1 = 0$ имеет корни $x_1$ и $x_2$. Найдите значение выражения

$$\left(\frac{x_1\sqrt{5}}{1-x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2\sqrt{5}}{1-x_1}\right)^2.$$

**3.3.1.** (12 баллов) Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{3}}+3\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{3}+1}{2} - \frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{3}}\right) : \frac{3+\sqrt[3]{9}+2\sqrt[3]{3}}{2}.$$

**3.3.2.** Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{4}}+4\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{4}+1}{3} - \frac{1}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{4}}\right) : \frac{4+\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}}{3}.$$

**3.3.3.** Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{5}}+5\right) - \left(\frac{\sqrt[3]{5}+1}{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1} - \frac{2}{1-\sqrt[3]{5}}\right) : \frac{5+\sqrt[3]{25}+2\sqrt[3]{5}}{4}.$$

**3.3.4.** Упростить выражение

$$\left(\frac{2}{\sqrt[3]{6}}+6\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{6}+1}{5}-\frac{1}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{6}+1}-\frac{2}{1-\sqrt[3]{6}}\right):\frac{6+\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{6}}{5}.$$

**4.1.1.** (12 баллов) Из пункта $A$ в пункт $B$ в 13:00 одновременно выехали автобус и велосипедист. После прибытия в пункт $B$ автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил велосипедиста в пункте $C$ в 13:10. Вернувшись в пункт $A$, автобус снова без задержки направился в пункт $B$ и догнал велосипедиста в пункте $D$, находящемся на расстоянии $\frac{2}{3}$ км от пункта $C$. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 4 км, а скорости автобуса и велосипедиста постоянны.

**4.1.2.** Из пункта $A$ в пункт $B$ в 11:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт $B$ автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте $C$ в 11:10. Вернувшись в пункт $A$, автобус снова без задержки направился в пункт $B$ и догнал пешехода в пункте $D$, находящемся на расстоянии $\frac{1}{3}$ км от пункта $C$. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

**4.1.3.** Из пункта $A$ в пункт $B$ в 10:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт $B$ автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте $C$ в 10:15. Вернувшись в пункт $A$, автобус снова без задержки направился в пункт $B$ и догнал пешехода в пункте $D$, находящемся на расстоянии $\frac{1}{4}$ км от пункта $C$. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 5 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

**4.1.4.** Из пункта $A$ в пункт $B$ в 14:00 одновременно отправились автобус и пешеход. После прибытия в пункт $B$ автобус, не задерживаясь, поехал обратно и встретил пешехода в пункте $C$ в 14:10. Вернувшись в пункт $A$, автобус снова без задержки направился в пункт $B$ и догнал пешехода в пункте $D$, находящемся на расстоянии $\frac{2}{15}$ км от пункта $C$. Найдите скорость автобуса (в км/ч), если расстояние между пунктами $A$ и $B$ равно 4 км, а скорости автобуса и пешехода постоянны.

**4.2.1.** (12 баллов) Каждое утро каждый член семьи Ивановых выпивает 180-граммовую чашку кофе с молоком. Количество молока и кофе в чашках у них разное. Маша Иванова выяснила, что она выпила $\frac{2}{9}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{6}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

**4.2.2.** Каждое утро каждый член семьи Петровых выпивает 240-граммовую кружку кофе с молоком. Количество молока и кофе в кружках у них разное. Олег Петров выяснил, что он выпил $\frac{2}{11}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{7}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

**4.2.3.** Каждое утро каждый член семьи Ивановых выпивает 170-граммовую чашку кофе с молоком. Количество молока и кофе в чашках у них разное. Ира Иванова выяснила, что она выпила $\frac{2}{11}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{4}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

**4.2.4.** Каждое утро каждый член семьи Петровых выпивает 230-граммовую кружку кофе с молоком. Количество молока и кофе в кружках у них разное. Кирилл Петров выяснил, что он выпил $\frac{2}{7}$ часть всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{5}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

**4.2.5.** Каждое утро каждый член семьи Ивановых выпивает 190-граммовую чашку кофе с молоком. Количество молока и кофе в чашках у них разное. Оля Иванова выяснила, что она выпила $\frac{1}{5}$ часть всего выпитого в это утро молока и $\frac{2}{13}$ части всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

**4.2.6.** Каждое утро каждый член семьи Петровых выпивает 220-граммовую кружку кофе с молоком. Количество молока и кофе в кружках у них разное. Антон Петров выяснил, что он выпил $\frac{2}{5}$ части всего выпитого в это утро молока и $\frac{1}{4}$ часть всего выпитого в это утро кофе. Сколько людей в этой семье?

**4.3.1.** (12 баллов) На столе в ряд лежит 13 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 5 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

**4.3.2.** На столе в ряд лежит 13 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 6 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

**4.3.3.** На столе в ряд лежит 14 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 5 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

**4.3.4.** На столе в ряд лежит 14 гирек, упорядоченных по массе (слева – самая легкая, справа – самая тяжелая). Известно, что масса каждой гирьки равна целому числу грамм, массы любых двух соседних гирек отличаются не более, чем на 6 грамм, а суммарная масса гирек не превосходит 2019 грамм. Найдите максимально возможную при этих условиях массу самой тяжелой гирьки.

**4.4.1.** (12 баллов) Коза съедает 1 воз сена за 6 недель, овца — за 8, а корова — за 3. За сколько недель съедят 30 таких возов сена 5 коз, 3 овцы и 2 коровы вместе?

**4.4.2.** Собака съедает 1 упаковку корма за 4 дня, кошка — за 5, а хомяк — за 10. За сколько дней съедят 63 такие упаковки корма 3 собаки, 7 кошек и 1 хомяк вместе?

**4.4.3.** Лошадь выпивает 1 бочонок воды за 6 дней, верблюд — за 2, а осел — за 9. За сколько дней выпьют 75 таких бочонков воды 5 лошадей, 3 верблюда и 4 осла вместе?

**4.4.4.** Курица съедает 1 мешок зерна за 10 недель, утка — за 8, а гусь — за 5. За сколько недель съедят 45 таких мешков зерна 7 куриц, 3 утки и 4 гуся вместе?

**5.1.1.** (12 баллов) В остроугольном треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $35^\circ$, отрезки $BB_1$ и $CC_1$ — высоты, точки $B_2$ и $C_2$ — середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно. Прямые $B_1C_2$ и $C_1B_2$ пересекаются в точке $K$. Найдите величину (в градусах) угла $B_1KB_2$.

**5.1.2.** В остроугольном треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $25°$, отрезки $BB_1$ и $CC_1$ — высоты, точки $B_2$ и $C_2$ — середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно. Прямые $B_1C_2$ и $C_1B_2$ пересекаются в точке $K$. Найдите величину (в градусах) угла $C_1KC_2$.

**5.1.3.** В остроугольном треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $40°$, отрезки $BB_1$ и $CC_1$ — высоты, точки $B_2$ и $C_2$ — середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно. Прямые $B_1C_2$ и $C_1B_2$ пересекаются в точке $K$. Найдите величину (в градусах) угла $B_1KB_2$.

**5.1.4.** В остроугольном треугольнике $ABC$ угол $A$ равен $20°$, отрезки $BB_1$ и $CC_1$ — высоты, точки $B_2$ и $C_2$ — середины сторон $AC$ и $AB$ соответственно. Прямые $B_1C_2$ и $C_1B_2$ пересекаются в точке $K$. Найдите величину (в градусах) угла $C_1KC_2$.

**5.2.1.** (12 баллов) $BL$ – биссектриса треугольника $ABC$. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 2$, $|BL| = 3\sqrt{10}$, $|CL| = 3$.

**5.2.2.** $BL$ – биссектриса треугольника $ABC$. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 3$, $|BL| = 6\sqrt{5}$, $|CL| = 4$.

**5.2.3.** $BL$ – биссектриса треугольника $ABC$. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 2$, $|BL| = \sqrt{30}$, $|CL| = 5$.

**5.2.4.** $BL$ – биссектриса треугольника $ABC$. Найдите его площадь, если известно, что $|AL| = 4$, $|BL| = 2\sqrt{15}$, $|CL| = 5$.

**5.3.1.** (12 баллов) Среди всевозможных треугольников $ABC$ таких, что $BC = 2\sqrt[4]{3}$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, найдите тот, площадь которого максимальна. Чему равна эта площадь?

**5.3.2.** Среди всевозможных треугольников $ABC$ таких, что $BC = 4\sqrt[4]{3}$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, найдите тот, площадь которого максимальна. Чему равна эта площадь?

**5.3.3.** Среди всевозможных треугольников $ABC$ таких, что $BC = 8\sqrt[4]{3}$, $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, найдите тот, площадь которого максимальна. Чему равна эта площадь?

**6.1.1.** (12 баллов) Решите уравнение

$$5^{\sqrt{x^3+3x^2+3x+1}} = \sqrt{\left(5\sqrt[4]{(x+1)^5}\right)^3}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

**6.1.2.** Решите уравнение

$$3^{\sqrt[3]{x^2-2x+1}} = \sqrt[5]{\left(3\sqrt[6]{x-1}\right)^2}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

**6.1.3.** Решите уравнение

$$5^{\sqrt{x^3-3x^2+3x-1}} = \sqrt[3]{\left(5\sqrt[6]{(x-1)^7}\right)^4}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

**6.1.4.** Решите уравнение

$$3^{\sqrt[3]{x^2+2x+1}} = \sqrt{\left(3\sqrt{x+1}\right)^3}.$$

В ответ запишите корень, если он один, или сумму корней, если их несколько.

**6.2.1.** (12 баллов) Решите систему уравнений $\begin{cases} 9y^2 - 4x^2 = 144 - 48x, \\ 9y^2 + 4x^2 = 144 + 18xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

**6.2.2.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 - x^2 = 36 + 12x, \\ 4y^2 + x^2 = 36 - 6xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

**6.2.3.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 9y^2 - x^2 = 144 + 24x, \\ 9y^2 + x^2 = 144 - 9xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

**6.2.4.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 4y^2 - 9x^2 = 36 + 36x, \\ 4y^2 + 9x^2 = 36 - 18xy. \end{cases}$

Получив решение $(x_1; y_1), (x_2; y_2), ..., (x_n; y_n)$, в ответ запишите сумму квадратов

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2.$$

**6.3.1.** (12 баллов) Решите уравнение $2x^3 + 24x = 3 - 12x^2$.

**6.3.2.** Решите уравнение $2x^3 + 24x = 5 + 12x^2$.

**6.3.3.** Решите уравнение $2x^3 + 54x = -5 - 18x^2$.

**6.3.4.** Решите уравнение $2x^3 + 54x = 9 + 18x^2$.

**6.4.1.** (12 баллов) Решите неравенство $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}-\sqrt{33-x}>4$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

**6.4.2.** Решите неравенство $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-5}-\sqrt{32-x}>4$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

**6.4.3.** Решите неравенство $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-1}-\sqrt{38-x}>7$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

**6.4.4.** Решите неравенство $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+3}-\sqrt{36-x}>7$. В ответ запишите сумму всех его целочисленных решений.

**7.1.1.** (12 баллов) Найдите н~~аибольший отр~~ица~~тельны~~й ко~~рень ~~уравнения

$$\frac{\sin \pi x-\cos 2\pi x}{(\sin \pi x-1)^2+\cos^2 \pi x-1}=0.$$

**7.1.2.** Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x+\cos 2\pi x}{(\sin \pi x+1)^2+\cos^2 \pi x-1}=0.$$

**7.1.3.** Найдите наибольший отрицательный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x - \cos 2\pi x}{(\sin \pi x + 1)^2 + \cos^2 \pi x} = 0.$$

**7.1.4.** Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\sin \pi x + \cos 2\pi x}{(\sin \pi x - 1)^2 + \cos^2 \pi x} = 0.$$

**7.2.1.** (12 баллов) Вычислите значение выражения $\arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} - \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где $a$ и $b$ - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a-b|$.

**7.2.2.** Вычислите значение выражения $\arccos \frac{3}{\sqrt{10}} - \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где $a$ и $b$ - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a-b|$.

**7.2.3.** Вычислите значение выражения $\arccos\left(-\frac{1}{7}\right) - \arccos\left(-\frac{13}{14}\right)$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где $a$ и $b$ - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a-b|$.

**7.2.4.** Вычислите значение выражения $\arcsin \frac{1}{\sqrt{10}} - \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где $a$ и $b$ - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a+b|$.

**7.2.5.** Вычислите значение выражения $\arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} - \arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$. Запишите полученное выражение в виде $\frac{a\pi}{b}$, где $a$ и $b$ - целые, взаимно простые числа и укажите в ответе значение $|a+b|$.

**7.3.1.** (12 баллов) Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2 - x + 1)) = \sin(\pi(x-1)),$$

принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

**7.3.2.** Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2 - 3x + 3)) = \sin(\pi(x - 2)),$$

принадлежащих отрезку $[1; 3]$.

**7.3.3.** Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2 + 3x + 3)) = \sin(\pi(x + 1)),$$

принадлежащих отрезку $[-2; 0]$.

**7.3.4.** Найдите сумму всех действительных корней уравнения

$$\sin(\pi(x^2 + 5x + 7)) = \sin(\pi(x + 2)),$$

принадлежащих отрезку $[-3; -1]$.

**7.4.1.** (12 баллов) Сколько целочисленных корней уравнения

$$\cos 2\pi x + \cos \pi x = \sin 3\pi x + \sin \pi x$$

лежит между корнями уравнения $x^2 + 10x - 17 = 0$?

**7.4.2.** Сколько целочисленных корней уравнения

$$\sin \pi x + \sin 2\pi x + 1 = \cos \pi x + \cos 3\pi x - 1$$

лежит между корнями уравнения $x^2 + 12x - 29 = 0$?

**7.4.3.** Сколько целочисленных корней уравнения

$$\sin \pi x + \cos \frac{\pi x}{2} = \cos \frac{3\pi x}{2} + \sin \frac{\pi x}{2}$$

лежит между корнями уравнения $x^2 + 14x - 33 = 0$?

**7.4.4.** Сколько целочисленных корней уравнения

$$\cos 2\pi x + \sin 3\pi x - 1 = \sin \pi x + \cos \pi x + 1$$

лежит между корнями уравнения $x^2 + 18x - 21 = 0$?

**8.1.1.** (12 баллов) Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $3, 7, 11, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $2, 9, 16, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.1.2.** Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $2, 9, 16, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $3, 7, 11, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.1.3.** Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $4, 9, 14, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $1, 8, 15, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.1.4.** Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $1, 8, 15, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $4, 9, 14, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.1.5.** Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $1, 4, 7, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $3, 8, 13, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.1.6.** Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $3, 8, 13, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $1, 4, 7, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.1.7.** Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $2, 5, 8, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $3, 10, 17, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.1.8.** Среди первых ста элементов арифметической прогрессии $3, 10, 17, \ldots$ найдите те, которые являются также элементами арифметической прогрессии $2, 5, 8, \ldots$ В ответе укажите сумму найденных чисел.

**8.2.1.** (12 баллов) Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно второму, четвертому и седьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 64. Найти первый член геометрической прогрессии.

**8.2.2.** Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно третьему, шестому и десятому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 125. Найти первый член геометрической прогрессии.

**8.2.3.** Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно третьему, пятому и восьмому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 27. Найти первый член геометрической прогрессии.

**8.2.4.** Первый, второй и третий члены геометрической прогрессии попарно различны и равны соответственно четвертому, восьмому и тринадцатому членам некоторой арифметической прогрессии, а произведение этих трех чисел равно 216. Найти первый член геометрической прогрессии.

**8.3.1.** (12 баллов) Пять чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма квадратов — 70. Найдите наименьшее их этих чисел.

**8.3.2.** Семь чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма квадратов — 224. Найдите наибольшее их этих чисел.

**8.3.3.** Пять чисел образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма четвертых степеней — 136. Найдите наименьшее их этих чисел.

**8.3.4.** Семь чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма квадратов — 756. Найдите наибольшее их этих чисел.

**8.3.5.** Пять чисел образуют убывающую арифметическую прогрессию. Сумма их кубов равна нулю, а сумма четвертых степеней — 306. Найдите наименьшее их этих чисел.

**9.1.1.** (12 баллов) Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg}^2 x - 1$ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$.

**9.1.2.** Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 12\operatorname{ctg} x + 9\operatorname{ctg}^2 x - 3$ на интервале $(-\frac{\pi}{2}; 0)$.

$-$

**9.1.3.** Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x - 8\operatorname{ctg} x + 4\operatorname{ctg}^2 x + 5$ на интервале $(\frac{\pi}{2}; \pi)$.

$-$

**9.1.4.** Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x + 6\operatorname{ctg} x + 9\operatorname{ctg}^2 x + 4$ на интервале $(0; \frac{\pi}{2})$.

**9.2.1.** (12 баллов) Найдите минимальное значение выражения $\cos(x+y)$, если известно, что $\cos x+\cos y=\dfrac{1}{3}$.

**9.2.2.** Найдите максимальное значение выражения $\cos(x+y)$, если известно, что $\cos x-\cos y=\dfrac{1}{4}$.

**9.2.3.** Найдите минимальное значение выражения $\cos(x-y)$, если известно, что $\sin x+\sin y=\dfrac{2}{3}$.

**9.2.4.** Найдите максимальное значение выражения $\cos(x-y)$, если известно, что $\sin x-\sin y=\dfrac{3}{4}$.

**10.1.1.** (12 баллов) Числа $a$ и $b$ таковы, что многочлен $x^4+x^3+2x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите $b$.

**10.1.2.** Числа $a$ и $b$ таковы, что многочлен $x^4+3x^3+x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите $b$.

**10.1.3.** Числа $a$ и $b$ таковы, что многочлен $x^4+x^3-x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите $b$.

**10.1.4.** Числа $a$ и $b$ таковы, что многочлен $x^4-x^3+x^2+ax+b$ является квадратом некоторого другого многочлена. Найдите $b$.

**10.2.1.** (12 баллов) Найдите наибольшее из целых значений $a$, при которых уравнение

$$\sqrt[3]{x^2-(a+7)x+7a}+\sqrt[3]{3}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

**10.2.2.** Найдите наибольшее из целых значений $a$, при которых уравнение

$$\sqrt[5]{x^2-(a+9)x+9a}+\sqrt[5]{3}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

**10.2.3.** Найдите наименьшее из целых значений $a$, при которых уравнение

$$\sqrt[3]{x^2-(a-8)x-8a}+\sqrt[3]{5}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

**10.2.4.** Найдите наименьшее из целых значений $a$, при которых уравнение

$$\sqrt[5]{x^2-(a-9)x-9a}+\sqrt[5]{5}=0$$

имеет хотя бы один целый корень.

**10.3.1.** (12 баллов) Кривая, заданная уравнением $y=2^p x^2+5px-2^{p^2}$, пересекает ось $Ox$ в точках $A$ и $B$, а ось $Oy$ в точке $C$. Найдите сумму всех значений параметра $p$, при которых центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, лежит на оси $Ox$.

**10.3.2.** Кривая, заданная уравнением $y = 4^p x^2 + 3px - 2^{p^2}$, пересекает ось $Ox$ в точках $A$ и $B$, а ось $Oy$ в точке $C$. Найдите сумму всех значений параметра $p$, при которых центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, лежит на оси $Ox$.

**10.3.3.** Кривая, заданная уравнением $y = 8^p x^2 + px - 2^{p^2}$, пересекает ось $Ox$ в точках $A$ и $B$, а ось $Oy$ в точке $C$. Найдите сумму всех значений параметра $p$, при которых центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, лежит на оси $Ox$.

**10.3.4.** Кривая, заданная уравнением $y = 16^p x^2 - px - 2^{p^2}$, пересекает ось $Ox$ в точках $A$ и $B$, а ось $Oy$ в точке $C$. Найдите сумму всех значений параметра $p$, при которых центр окружности, описанной около треугольника $ABC$, лежит на оси $Ox$.

**10.4.1.** (12 баллов) Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$7xy - 13x + 15y - 37 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.

**10.4.2.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$7xy + 15x - 13y - 37 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.

**10.4.3.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$7xy + 6x - 22y - 28 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.

**10.4.4.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$7xy - 22x + 6y - 28 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.

**10.4.5.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$4xy - 23x + 9y - 58 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.

**10.4.6.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$4xy + 9x - 23y - 58 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.

**10.4.7.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$4xy + 11x - 21y - 64 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.

**10.4.8.** Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, являющиеся решениями уравнения

$$4xy - 21x + 11y - 64 = 0.$$

В ответе укажите сумму найденных значений $x$.