

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2019/2020 учебный год  
Задания отборочного этапа для 7–8 классов с ответами и решениями

**1.1.** (2 балла) На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 5 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

*Ответ:* 30.

*Решение.* Если  $x$  — число книг на обеих полках, то  $\frac{x}{3} + 5 = \frac{2x}{3} - 5$ , откуда  $x = 30$ .

**1.2.** На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 6 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

*Ответ:* 36.

**1.3.** На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 7 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

*Ответ:* 42.

**1.4.** На двух книжных полках стоят книги по математике, на каждой поровну. Если переставить 8 книг с первой полки на вторую, то на второй полке будет в 2 раза больше книг, чем на первой. Сколько всего книг на обеих полках?

*Ответ:* 48.

**2.1.** (14 баллов) На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 22, мастерами — 47, а среднее число очков во всей команде — 41. Какова доля (в процентах) мастеров в этой команде?

*Ответ:* 76.

*Решение.* Пусть в команде  $x$  юниоров и  $y$  мастеров. Тогда общее число очков, набранных командой, равно  $22x + 47y = 41(x + y)$ , откуда находим  $19x = 6y$ . Поэтому доля мастеров равна  $\frac{y}{x+y} = \frac{19y}{19x+19y} = \frac{19y}{25y} = 0,76$ , т. е. 76%.

**2.2.** На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 22, мастерами — 47, а среднее число очков во всей команде — 41. Какова доля (в процентах) юниоров в этой команде?

*Ответ:* 24.

**2.3.** На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 23, мастерами — 48, а среднее число очков во всей команде — 30. Какова доля (в процентах) мастеров в этой команде?

*Ответ:* 72.

**2.4.** На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 23, мастерами — 48, а среднее число очков во всей команде — 30. Какова доля (в процентах) юниоров в этой команде?

*Ответ:* 28.

**3.1.** (14 баллов) Вычислите  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ , если известно, что  $x + \frac{1}{x} = 3$ .

*Ответ:* 18.

*Решение.* Если  $x + \frac{1}{x} = a$ , то  $a^3 = (x + \frac{1}{x})^3 = x^3 + 3(x + \frac{1}{x}) + \frac{1}{x^3}$ , откуда  $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a = 18$ .

**3.2.** Вычислите  $x^3 + \frac{1}{x^3}$ , если известно, что  $x + \frac{1}{x} = 4$ .

*Ответ:* 52.

**3.3.** Вычислите  $x^3 - \frac{1}{x^3}$ , если известно, что  $x - \frac{1}{x} = 2$ .

*Ответ:* 14.

**3.4.** Вычислите  $x^3 - \frac{1}{x^3}$ , если известно, что  $x - \frac{1}{x} = 3$ .

*Ответ:* 36.

**4.1.** (14 баллов) Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 240 рублей, а 2 ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 440 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластика, 4 ручек и 6 фломастеров?

*Ответ:* 520.

*Решение.* Из условия следует, что 3 ластика, 8 ручек и 6 фломастеров стоят  $440 + 240 = 680$  рублей. Кроме того, 2 ластика, 6 ручек и 4 фломастера обойдутся в  $2 \cdot 240 = 480$  рублей. Значит, одна ручка стоит  $480 - 440 = 40$  рублей. Тогда 3 ластика, 4 ручки и 6 фломастеров стоят  $680 - 4 \cdot 40 = 520$  рублей.

**4.2.** Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 250 рублей, а 3 ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 690 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластика, 9 ручек и 8 фломастеров?

*Ответ:* 820.

**4.3.** Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей, а 2 ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 420 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластика, 4 ручек и 6 фломастеров?

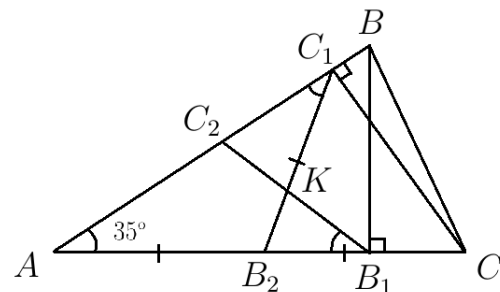
*Ответ:* 490.

**4.4.** Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей, а 3 ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 620 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластика, 9 ручек и 8 фломастеров?

*Ответ:* 710.

**5.1.** (14 баллов) В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $35^\circ$ , отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты, точки  $B_2$  и  $C_2$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Прямые  $B_1C_2$  и  $C_1B_2$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите величину (в градусах) угла  $B_1KB_2$ .

*Ответ:* 75.



*Решение.* Заметим, что углы  $B$  и  $C$  треугольника  $ABC$  больше, чем  $\angle A = 35^\circ$  (в противном случае он был бы тупоугольным), поэтому точка  $C_1$  лежит на стороне  $AB$  между точками  $B$  и  $C_2$ , а точка  $B_1$  лежит на стороне  $AC$  между точками  $C$  и  $B_2$ . Поэтому точка  $K$  пересечения прямых  $B_1C_2$  и  $C_1B_2$  лежит внутри треугольника. Поскольку  $C_1B_2$  — медиана прямоугольного треугольника  $CC_1A$ , треугольник  $C_1B_2A$  равнобедренный. Следовательно,  $\angle AB_1C_2 = 35^\circ$ . Аналогично получаем  $\angle AC_1B_2 = 35^\circ$ , откуда  $\angle AB_2C_1 = 180^\circ - 2 \cdot 35^\circ = 110^\circ$ . Тогда  $\angle B_1KB_2 = \angle AB_2K - \angle AB_1K = 110^\circ - 35^\circ = 75^\circ$ .

**5.2.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $25^\circ$ , отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты, точки  $B_2$  и  $C_2$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Прямые  $B_1C_2$  и  $C_1B_2$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите величину (в градусах) угла  $C_1KC_2$ .

*Ответ:* 105.

**5.3.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $40^\circ$ , отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты, точки  $B_2$  и  $C_2$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Прямые  $B_1C_2$  и  $C_1B_2$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите величину (в градусах) угла  $B_1KB_2$ .

*Ответ:* 60.

**5.4.** В остроугольном треугольнике  $ABC$  угол  $A$  равен  $20^\circ$ , отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  — высоты, точки  $B_2$  и  $C_2$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно. Прямые  $B_1C_2$  и  $C_1B_2$  пересекаются в точке  $K$ . Найдите величину (в градусах) угла  $C_1KC_2$ .

*Ответ:* 120.

**6.1.** (14 баллов) В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 16 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 17 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

*Ответ:* 15.

*Решение.* Житель племени Ах не может сказать «все мы из племени Ух», поэтому первый из племени Ух. Значит, в хижине не меньше 17 человек. Поэтому второй сказал правду, т. е. он из племени Ах. Значит, в хижине не больше 17 человек. Таким образом, в хижине 17 человек. Третий — из племени Ух, так как сказал что всего их пятеро. Но поскольку он сказал, что жителей племени Ух не меньше трёх, их не более двух. Двое уже нашлись (третий и первый), поэтому их ровно 2. Тогда жителей из племени Ах 15 человек.

**6.2.** В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 10 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 11 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

*Ответ:* 9.

**6.3.** В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 13 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 14 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

*Ответ:* 12.

**6.4.** В хижине собрались несколько жителей острова, часть из которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух

всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 18 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 19 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 17.

**7.1.** (14 баллов) Найдите наибольшее из целых значений  $a$ , при которых уравнение

$$(x - a)(x - 7) + 3 = 0$$

имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: 11.

Решение. При искомым значениях  $a$  числа  $x - a$  и  $x - 7$  целые, а их произведение равно  $-3$ , поэтому возможны 4 случая:

$$\begin{cases} x - a = 1, \\ x - 7 = -3; \end{cases} \quad \begin{cases} x - a = 3, \\ x - 7 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x - a = -1, \\ x - 7 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x - a = -3, \\ x - 7 = 1, \end{cases}$$

откуда находим соответственно

$$\begin{cases} a = 3, \\ x = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 3, \\ x = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 11, \\ x = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 11, \\ x = 8. \end{cases}$$

Значит, искомыми значениями являются  $a = 3$  и  $a = 11$ , из которых наибольшее равно 11.

**7.2.** Найдите наибольшее из целых значений  $a$ , при которых уравнение  $(x - a)(x - 9) + 3 = 0$  имеет хотя бы один целый корень.

Ответ: 13.

**7.3.** Найдите наименьшее из целых значений  $a$ , при которых уравнение  $(x - a)(x + 8) + 5 = 0$  имеет хотя бы один целый корень.

Ответ:  $-12$ .

**7.4.** Найдите наименьшее из целых значений  $a$ , при которых уравнение  $(x - a)(x + 9) + 5 = 0$  имеет хотя бы один целый корень.

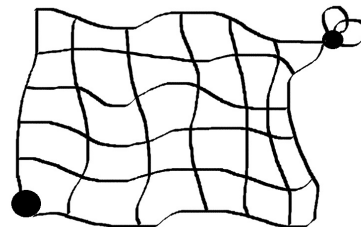
Ответ:  $-15$ .

**8.1.** (14 баллов) Целеустремлённый паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?

Ответ: 462.

Решение. Для достижения цели пауку нужно сделать 5 шагов вверх и 6 шагов вправо, т. е. в общей сложности 11 шагов. Искомое число способов добраться до мухи равно числу различных способов выбрать 5 шагов вверх из возможных 11, т. е. всего  $\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5!} = 462$  способа (это число называется числом сочетаний без повторений из 11 элементов по 5 и обозначается  $C_{11}^5$ ).

Ответ можно получить также, последовательно подписывая возле узлов паутины (начиная с ближайших к пауку), сколькими способами в них можно попасть; получится фрагмент так называемого *треугольника Паскаля*, который образуют числа  $C_n^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ .



**8.2.** Целеустремленный паук хочет доползти до мухи, попавшей в его паутину (см. рисунок). При этом ползти он может только вверх и вправо по нитям паутины. Сколько есть различных способов у паука достигнуть свою цель?

*Ответ:* 126.

