

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2019/2020 учебный год
Задания отборочного этапа для 5–6 классов с ответами и решениями

1.1. (4 балла) Найдите наименьшее общее кратное чисел 28 и 72.

Ответ: 504.

Решение. Имеем $28 = 2^2 \cdot 7$, $72 = 2^3 \cdot 3^2$, поэтому $\text{НОК}(28, 72) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 504$.

1.2. Найдите наименьшее общее кратное чисел 36 и 42.

Ответ: 252.

1.3. Найдите наименьшее общее кратное чисел 35 и 90.

Ответ: 630.

1.4. Найдите наибольший общий делитель чисел 144 и 120.

Ответ: 24.

Решение. Имеем $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, поэтому $\text{НОД}(144, 120) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

1.5. Найдите наибольший общий делитель чисел 162 и 90.

Ответ: 18.

1.6. Найдите наибольший общий делитель чисел 84 и 105.

Ответ: 21.

2.1. (16 баллов) На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 22, мастерами — 47, а среднее число очков во всей команде — 41. Какова доля (в процентах) мастеров в этой команде?

Ответ: 76.

Решение. Пусть в команде x юниоров и y мастеров. Тогда общее число очков, набранных командой, равно $22x + 47y = 41(x + y)$, откуда находим $19x = 6y$. Поэтому доля мастеров равна $\frac{y}{x+y} = \frac{19y}{19x+19y} = \frac{19y}{25y} = 0,76$, т. е. 76%.

2.2. На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 22, мастерами — 47, а среднее число очков во всей команде — 41. Какова доля (в процентах) юниоров в этой команде?

Ответ: 24.

2.3. На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 23, мастерами — 48, а среднее число очков во всей команде — 30. Какова доля (в процентах) мастеров в этой команде?

Ответ: 28.

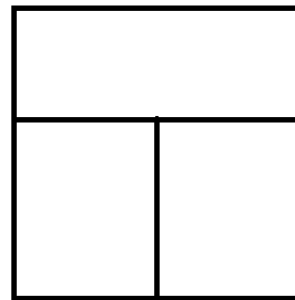
2.4. На турнир по стрельбе от спортивного общества «Вымпел» поехала команда, состоящая из юниоров и мастеров. Среднее число очков, набранных юниорами, оказалось равно 23, мастерами — 48, а среднее число очков во всей команде — 30. Какова доля (в процентах) юниоров в этой команде?

Ответ: 72.

3.1. (16 баллов) Квадрат со стороной 36 см разрезали на три прямоугольника так, что площади всех трёх прямоугольников равны и у любых двух прямоугольников есть общий участок границы. Какова общая длина (в см) сделанных разрезов?

Ответ: 60.

Решение. Один разрез имеет длину 36 см и отделяет один из прямоугольников (см. рис.). Оставшиеся 2 прямоугольника имеют общую сторону x , поэтому они оба размером $18 \times x$ см. Следовательно, $18 \cdot x = 36^2/3$, откуда $x = 24$ см. Значит, общая длина разрезов составляет 60 см.



3.2. Квадрат со стороной 42 см разрезали на три прямоугольника так, что площади всех трёх прямоугольников равны и у любых двух прямоугольников есть общий участок границы. Какова общая длина (в см) сделанных разрезов?

Ответ: 70.

3.3. Квадрат со стороной 48 см разрезали на три прямоугольника так, что площади всех трёх прямоугольников равны и у любых двух прямоугольников есть общий участок границы. Какова общая длина (в см) сделанных разрезов?

Ответ: 80.

3.4. Квадрат со стороной 54 см разрезали на три прямоугольника так, что площади всех трёх прямоугольников равны и у любых двух прямоугольников есть общий участок границы. Какова общая длина (в см) сделанных разрезов?

Ответ: 90.

4.1. (16 баллов) Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 240 рублей, а 2 ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 440 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластика, 4 ручек и 6 фломастеров?

Ответ: 520.

Решение. Из условия следует, что 3 ластика, 8 ручек и 6 фломастеров стоят $440 + 240 = 680$ рублей. Кроме того, 2 ластика, 6 ручек и 4 фломастера обойдутся в $2 \cdot 240 = 480$ рублей. Значит, одна ручка стоит $480 - 440 = 40$ рублей. Тогда 3 ластика, 4 ручки и 6 фломастеров стоят $680 - 4 \cdot 40 = 520$ рублей.

4.2. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 250 рублей, а 3 ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 690 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластика, 9 ручек и 8 фломастеров?

Ответ: 820.

4.3. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей, а 2 ластика, 4 фломастера и 5 ручек стоят 420 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 3 ластика, 4 ручек и 6 фломастеров?

Ответ: 490.

4.4. Ластик, 3 ручки и 2 фломастера стоят 230 рублей, а 3 ластика, 6 фломастеров и 8 ручек стоят 620 рублей. Какова общая стоимость (в рублях) 4 ластика, 9 ручек и 8 фломастеров?

Ответ: 710.

5.1. (16 баллов) Белка прыгает раз в минуту на расстояние 1 по числовой прямой, начиная с точки 0, причём в любую сторону. Она прыгала 40 минут, после чего уснула. Сколько на числовой прямой существует точек, в которых могла уснуть белка?

Ответ: 41.

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть белка прыгала N минут. Если N чётно ($N = 2n$), то через $2n$ шагов белка может попасть только в точку с чётной координатой в диапазоне от $-2n$ до $2n$, причём в любую из них (в точку с координатой $2k$ можно попасть так: припрыгать в неё за $2k$ первых минут, а каждую следующую минуту менять направление). От $-2n$ до $2n$ таких точек $2n + 1 = N + 1$.

Если число минут нечётно ($N = 2n + 1$), то через $2n + 1$ шаг белка может попасть только в точку с нечётной координатой в диапазоне от $-2n - 1$ до $2n + 1$, причём в любую из них (в точку с координатой $2k + 1$ можно попасть так: прийти в неё за $2k + 1$ первых минут, а каждую следующую минуту менять направление). От $-2n - 1$ до $2n + 1$ таких точек $2n + 2 = N + 1$.

5.2. Заяц прыгает раз в минуту на расстояние 1 по числовой прямой, начиная с точки 0, причём в любую сторону. Он прыгал 35 минут, после чего уснул. Сколько на числовой прямой существует точек, в которых мог уснуть заяц?

Ответ: 36.

5.3. Белка прыгает раз в минуту на расстояние 1 по числовой прямой, начиная с точки 0, причём в любую сторону. Она прыгала 45 минут, после чего уснула. Сколько на числовой прямой существует точек, в которых могла уснуть белка?

Ответ: 46.

5.4. Заяц прыгает раз в минуту на расстояние 1 по числовой прямой, начиная с точки 0, причём в любую сторону. Он прыгал 30 минут, после чего уснул. Сколько на числовой прямой существует точек, в которых мог уснуть заяц?

Ответ: 31.

6.1. (16 баллов) В хижине собрались несколько жителей острова, часть которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 16 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 17 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 15.

Решение. Житель племени Ах не может сказать «все мы из племени Ух», поэтому первый из племени Ух. Значит, в хижине не меньше 17 человек. Поэтому второй сказал правду, т. е. он из племени Ах. Значит, в хижине не больше 17 человек. Таким образом, в хижине 17 человек. Третий — из племени Ух, так как сказал что всего их пятеро. Но поскольку он сказал, что жителей племени Ух не меньше трёх, их не более двух. Двое уже нашлись (третий и первый), поэтому их ровно 2. Тогда жителей из племени Ах 15 человек.

6.2. В хижине собрались несколько жителей острова, часть которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 10 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 11 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 9.

6.3. В хижине собрались несколько жителей острова, часть которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда

лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 13 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 14 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 12.

6.4. В хижине собрались несколько жителей острова, часть которых из племени Ах, а остальные из племени Ух. Жители племени Ах всегда говорят правду, а жители племени Ух всегда лгут. Один из жителей сказал: «Нас в хижине не больше 18 человек», а затем добавил: «Все мы из племени Ух». Другой сказал: «Нас в хижине не больше 19 человек», и после заметил: «Некоторые из нас из племени Ах». Третий сказал: «Нас в хижине пятеро», и, оглядев людей вокруг, отметил: «Жителей племени Ух среди нас не меньше трёх». Сколько в хижине жителей из племени Ах?

Ответ: 17.

7.1. (16 баллов) Родители разрешили Васе купить себе в подарок две игрушки. В магазине продаётся 7 разных радиоуправляемых машинок и 5 разных наборов конструктора. Сколькими способами он может выбрать себе подарок?

Ответ: 66.

Решение. Одну машинку и один конструктор Вася может выбрать $5 \cdot 7 = 35$ способами, две разные машинки — $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ способом (одну машинку можно выбрать 7 способами, одну из оставшихся — 6 способами, но таким образом каждая пара машинок посчитана ровно два раза), а два конструктора — $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ способами. Итого получаем $35 + 21 + 10 = 66$ способов.

Задачу можно решить иначе: заметим, что в магазине Вася может купить $7 + 5 = 12$ различных игрушек, поэтому пару из них можно выбрать $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ различными способами.

7.2. Родители разрешили Васе купить себе в подарок две игрушки. В магазине продаётся 5 разных радиоуправляемых машинок и 8 разных наборов конструктора. Сколькими способами он может выбрать себе подарок?

Ответ: 78.

7.3. Родители разрешили Яне купить себе в подарок две игрушки. В магазине продаётся 4 разных кукольных домика и 7 разных плюшевых мишек. Сколькими способами она может выбрать себе подарок?

Ответ: 55.

7.4. Родители разрешили Яне купить себе в подарок две игрушки. В магазине продаётся 8 разных кукольных домиков и 4 разных плюшевых мишки. Сколькими способами она может выбрать себе подарок?

Ответ: 66.