Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (2-й тур)

1.1. Из цифр 1, 3 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ. 1998 (все возможные числа: 135, 153, 315, 351, 513, 531).

1.2. Из цифр 1, 2 и 5 составляют различные трёхзначные числа, в каждом из которых все цифры различны. Найдите сумму всех таких трёхзначных чисел.

Ответ. 1776 (все возможные числа: 125, 152, 215, 251, 512, 521).

2.1. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого на $1/3$ больше другого и на $1/3$ меньше гипотенузы.

Ответ. $\frac{2}{3} \approx 0.67$.

2.2. Найдите площадь прямоугольного треугольника, один катет которого на $2/3$ больше другого и на $2/3$ меньше гипотенузы.

Ответ. $\frac{8}{3} \approx 2.67$.

3.1. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $577a$, $\frac{2020b}{7}$, $\frac{c}{7}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 4039.

Решение. Пусть $b = aq$, $c = aq^2$. Свойства арифметической прогрессии и условия задачи приводят к уравнению $2 \cdot \frac{2020aq}{7} = 577a + \frac{aq^2}{7} \Leftrightarrow q^2 - 4040q + 4039 = 0$, откуда $q = 1$ или $q = 4039$. Убывающей геометрическая прогрессия может быть только при $q = 4039$ (если, например, $a = -1$).

3.2. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $451a$, $\frac{2030b}{9}$, $\frac{c}{9}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 4059.

3.3. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $311a$, $\frac{1711b}{11}$ и $\frac{c}{11}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 3421.

3.4. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $641a$, $\frac{2244b}{7}$ и $\frac{c}{7}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 4487.

3.5. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $671a$, $\frac{3020b}{9}$ и $\frac{c}{9}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ. 6039.

3.6. Убывающая последовательность a, b, c — геометрическая прогрессия, а последовательность $279a$, $\frac{1535b}{11}$ и $\frac{c}{11}$ — арифметическая прогрессия. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

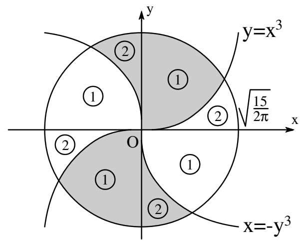
Ответ. 3069.

4.1. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2\pi(x^2 + y^2) \leqslant 15, \\ x^4 - y^4 \leqslant xy - x^3y^3. \end{cases}$$

Ответ. 3.75.

Решение. Первое множество есть внутренность круга радиуса $\sqrt{\frac{15}{2\pi}}$. Второе неравенство равносильно



$$x^3(x+y^3) \leqslant y(x+y^3) \quad \Leftrightarrow \quad (x^3-y)(x+y^3) \leqslant 0.$$

Изобразив на плоскости кривые $y=x^3$ и $x=-y^3$, получаем, что системе удовлетворяет заштрихованная область. Учитывая, что отмеченные цифрой 1 области одинаковы, а также одинаковы области, отмеченные цифрой 2, получаем, что искомая площадь равна площади полукруга радиуса $\sqrt{\frac{15}{2\pi}}$, то есть равна $\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\right)^2 = \frac{15}{4}$.

4.2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \pi(x^2+y^2) \leqslant 17, \\ x^4-y^4 \leqslant x^3y^3-xy. \end{cases}$$

Ответ. 8.5.

4.3. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \pi(x^2+y^2) \leqslant 23, \\ x^4-y^4 \geqslant xy-x^3y^3. \end{cases}$$

Ответ. 11.5.

4.4. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} 2\pi(x^2+y^2) \leqslant 29, \\ x^4-y^4 \geqslant x^3y^3-xy. \end{cases}$$

Ответ. 7.25.

5.1. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB=5$, $AC=8$ и $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $10\sqrt{\frac{137}{3}} \approx 67.58$.

Решение. Максимум объёма реализуется при угле $\alpha = 60°$, тогда высота пирамиды равна $R\operatorname{tg}\alpha = R\sqrt{3}$, где R — радиус описанной вокруг треугольника окружности. При заданных условиях возможны два треугольника — остроугольный и тупоугольный, площади которых совпадают (они равны $\frac{5\cdot 8}{2}\cdot\frac{4}{5} = 16$), но радиус описанной окружности будет больше у тупоугольного треугольника. Тогда

$$BC^2 = 5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = 25+64+48 = 137, \quad \text{и} \quad R = \frac{\sqrt{137}}{2\cdot\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{137}}{8}.$$

Итоговый объём равен $V = \frac{1}{3}\cdot 16\cdot\frac{5\sqrt{137}}{8}\sqrt{3} = 10\sqrt{\frac{137}{3}} \approx 67.58$.

5.2. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB=5$, $AC=8$ и $\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $10\sqrt{51} \approx 71.41$.

5.3. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB=3$, $AC=5$ и $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $\frac{5\sqrt{39}}{2} \approx 15.61$.

5.4. Каков наибольший объём пирамиды $SABC$, у которой $AB = 3$, $AC = 5$ и $\sin\angle BAC = \frac{3}{5}$, а все боковые рёбра SA, SB, SC образуют с плоскостью основания одинаковые углы, не превышающие $60°$?

Ответ. $\frac{5\sqrt{174}}{4} \approx 16.49$.

6.1. На 19 карточках написаны числа $15, 16, 17, \ldots, 33$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 4596.

Решение. По условию получается, что у каждого из участников будут либо таблички только с чётными числами, либо только с нечётными. Выбираем участника (3 способа), отдаём ему все 9 табличек с чётными числами. Оставшиеся 10 табличек с нечётными числами распределяем между двумя остальными – это можно сделать 2^{10} способами. Но при этом будет 2 способа, когда кто-то из этих двух ребят останется без табличек. Значит, получается $3\cdot(2^{10}-2)$ способов.

Аналогично отдаём все таблички с нечётными числами одному участнику, а 9 остальных распределяем между двумя остальными. Здесь получается $3 \cdot (2^9 - 2)$ способов.

Всего способов: $3 \cdot (2^{10} + 2^9 - 4) = 3 \cdot 4 \cdot (2^8 + 2^7 - 1) = 4596$.

6.2. На 17 карточках написаны числа $10, 11, 12, \ldots, 26$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 2292.

6.3. На 23 карточках написаны числа $13, 14, 15, \ldots, 35$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 18420.

6.4. На 21 карточке написаны числа $11, 12, 13, \ldots, 31$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 9204.

6.5. На 19 карточках написаны числа $14, 15, 16, \ldots, 32$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 4596.

6.6. На 23 карточках написаны числа $12, 13, 14, \ldots, 34$ соответственно (по одному числу на карточке). Участники математического кружка Вася, Петя и Миша собрались разделить между собой все эти карточки так, чтобы каждому досталась хотя бы одна карточка и ни у кого не нашлось пары карточек, разность чисел на которых нечётна. Сколько существует способов такого дележа?

Ответ. 18420.

7.1. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = px - x^2$ пересекает гиперболу $xy = q$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 324, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 2 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 42.

Решение. Система $y = px - x^2$, $xy = q$ сводится к кубическому уравнению $x^3 - px^2 + q = 0$, имеющему, по условию задачи, три различных корня x_1, x_2, x_3, так как у любых двух разных точек кривой $y = px - x^2$ абсциссы различны. По теореме Виета,

$$x_1 + x_2 + x_3 = p, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0, \quad x_1x_2x_3 = -q.$$

Обозначим $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Заметим, что если хотя бы одно из чисел x_1, x_2 или x_3 равно 0, то $q = 0$, и у кубического уравнения будет лишь два корня, что противоречит условию задачи. Тогда, в силу системы,

$$y_1 = \frac{q}{x_1}, \qquad y_2 = \frac{q}{x_2}, \qquad y_3 = \frac{q}{x_3},$$

откуда

$$y_1 + y_2 + y_3 = q\,\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = 0; \quad y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3 = q^2\,\frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = -pq.$$

Точка M пересечения медиан треугольника ABC имеет координаты

$$\left(\frac{1}{3}\,(x_1 + x_2 + x_3), \frac{1}{3}\,(y_1 + y_2 + y_3)\right).$$

С учетом теоремы Виета имеем $M\left(\frac{p}{3}, 0\right)$. Теперь вычислим сумму квадратов длин сторон треугольника ABC. Она равна

$$(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (y_2 - y_3)^2 + (y_3 - y_1)^2 =$$

$$= 2(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 6(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) + 2(y_1 + y_2 + y_3)^2 - 6(y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3) = 2p^2 + 6pq.$$

Исходя из условия задачи, $\left|\frac{p}{3}\right| = 2$, $2p^2 + 6pq = 324$, откуда находим две пары: $(p; q) = (6; 7)$ или $(p; q) = (-6; -7)$. В обоих случаях $pq = 42$.

7.2. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = qx - x^2$ пересекает гиперболу $xy = p$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 378, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 3 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 36.

7.3. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = px - x^2$ пересекает гиперболу $xy = q$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 432, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 4 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 24.

7.4. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = qx - x^2$ пересекает гиперболу $xy = p$ в трёх различных точках A, B и C, причём сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 252, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 2 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 30.

7.5. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = px - x^2$ пересекает гиперболу $xy = q$ в трёх различных точках A, B и C, причем сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 270, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 3 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 18.

7.6. Числа p и q подобраны так, что парабола $y = qx - x^2$ пересекает гиперболу $xy = p$ в трёх различных точках A, B и C, причем сумма квадратов сторон треугольника ABC равна 360, а точка пересечения его медиан находится на расстоянии 4 от начала координат. Найдите произведение pq.

Ответ. 12.

8.1. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2\sin x = \operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = \operatorname{ctg} z, \\ \sin z = \operatorname{tg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\cos x - \sin z$.

Ответ. $-\frac{5\sqrt{3}}{6} \approx -1.44$.

Решение. Возводя в квадрат первое уравнение и добавляя к обеим частям 1, с учетом второго уравнения имеем

$$4\sin^2 x + 1 = \operatorname{tg}^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} = 4\operatorname{tg}^2 z.$$

Проделывая ту же процедуру с третьим уравнением, находим

$$\sin^2 z + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad 4\cos^2 x = \frac{4}{\sin^2 z + 1}.$$

Складывая полученные соотношения, получаем

$$5 = 4\operatorname{tg}^2 z + \frac{4}{\sin^2 z + 1} = \frac{4\sin^2 z}{1 - \sin^2 z} + \frac{4}{\sin^2 z + 1} = \frac{4 + 4\sin^4 z}{1 - \sin^4 z} \quad \Rightarrow \quad 9\sin^4 z = 1,\ \sin^2 z = \frac{1}{3}.$$

Подставляя эту величину в предыдущие формулы, вычисляем $\cos^2 x = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{tg}^2 y = 1$. Стало быть, в решения (x, y, z) данной в условии системы могут входить только числа

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad y = \pm\frac{\pi}{4} + \pi l, \quad z = \pm\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi m,\ k, l, m \in \mathbb{Z},$$

и, поэтому возможны только случаи

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь проанализируем систему по знакам левых и правых частей:

- если x лежит в I четверти, то либо y лежит в I четверти, z лежит в I четверти, либо y лежит в III четверти, z лежит во II четверти;

- если x лежит во II четверти, то либо y лежит в I четверти, z лежит в III четверти, либо y лежит в III четверти, z лежит в IV четверти;

- если x лежит в III четверти, то либо y лежит во II четверти, z лежит во II четверти, либо y лежит в IV четверти, z лежит в I четверти;

- если x лежит в IV четверти, то либо y лежит во II четверти, z лежит в IV четверти, либо y лежит в IV четверти, z лежит в III четверти.

Взяв тройку $x = \dfrac{7\pi}{6}$, $y = -\dfrac{\pi}{4}$, $z = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (прямой проверкой убеждаемся, что она удовлетворяет системе из условия задачи), у которой x в III четверти, а z в I четверти, получаем минимальное из возможных значений $\cos x - \sin z$, равное $-\sqrt{3}/2 - 1/\sqrt{3} = -5/2\sqrt{3}$.

8.2. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sqrt{3}\sin x = \operatorname{tg} y, \\ 2\sin y = \operatorname{ctg} z, \\ \sin z = 2\operatorname{tg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\cos x - \cos z$.

Ответ. $-\frac{7\sqrt{2}}{6} \approx -1.65$.

8.3. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} 2\cos x = \operatorname{ctg} y, \\ 2\sin y = \operatorname{tg} z, \\ \cos z = \operatorname{ctg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\sin x + \cos z$.

Ответ. $-\frac{5\sqrt{3}}{6} \approx -1.44$.

8.4. Для всех троек (x, y, z), удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos x = \operatorname{ctg} y, \\ 2\cos y = \operatorname{tg} z, \\ \cos z = 2\operatorname{ctg} x, \end{cases}$$

найдите наименьшее значение выражения $\sin x + \sin z$.

Ответ. $-\frac{7\sqrt{2}}{6} \approx -1.65$.

9.1. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20182019; 20192018]$, для которых число $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ чётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 4999.

Решение. Рассмотрим последовательности

$$x_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad y_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad a_n = x_n + y_n.$$

Поскольку $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, имеем $y_n \in (0; 1)$ при чётных n, $y_n \in (-1; 0)$ при нечётных n. Тогда $[x_n] = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ при чётных n равно $a_n - 1$, а при нечётных — просто a_n. Кроме того, имеем $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при всех натуральных n. Так как $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, то $a_3 = 4$ и получаем такую последовательность чётности для a_n $(n = 1, 2, \ldots)$: неч, неч, чёт, неч, неч, чёт, ...

Тогда $[x_n]$ связано с a_n так:

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
a_n	чет	нечет	нечет	чет	нечет	нечет
$[x_n]$	$a_n - 1$	a_n	$a_n - 1$	a_n	$a_n - 1$	a_n
$[x_n]$	нечет	нечет	чет	чет	чет	нечет

Так как $x_n = a_n - y_n$, то для номеров n вида $6k$, $6k+1$, $6k+5$ число $[x_n]$ нечётно, а для номеров n вида $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$ чётно. Поскольку $20182019 = 6k_1 + 5$, $20192018 = 6k_2 + 2$, среди чисел $n = 20182019, \ldots, 20192018$ искомых $3 \cdot \frac{20192018 - 20182022}{6} + 1 = 4999$.

9.2. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20182018; 20192019]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n\right]$ нечётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 5001.

9.3. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20042018; 20192005]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right]$ чётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 74994.

9.4. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20042005; 20182019]$, для которых число $\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ нечётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 70007.

9.5. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20052004; 20192018]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^n\right]$ чётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 70007.

9.6. Сколько существует натуральных чисел $n \in [20052019; 20182004]$, для которых число $\left[\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n\right]$ нечётно? (Здесь через $[x]$ обозначено наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Ответ. 64993.

10.1. Найдите наименьшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_2(120-2x\sqrt{32-2x})^2+\left|\log_2\dfrac{120-2x\sqrt{32-2x}}{(x^2-2x+8)^3}\right|}{5\log_7(71-2x\sqrt{32-2x})-2\log_2(120-2x\sqrt{32-2x})} \geqslant 0.$$

Ответ: $-13-\sqrt{57} \approx -20.55$.

Решение. Обозначим $f(x)=-\log_2(x+120)$. Тогда, с учетом условия $71-2x\sqrt{32-2x}>0$, исходное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{2f(-2x\sqrt{32-2x})+|3f(x^2-2x-112)-f(-2x\sqrt{32-2x})|}{(2\log_2 7)\cdot f(-2x\sqrt{32-2x})-5f(-2x\sqrt{32-2x}-49)} \geqslant 0.$$

Для функции $h(x)=-2x\sqrt{32-2x}$ имеем

$$h'(x)=-2\sqrt{32-2x}+\frac{2x}{\sqrt{32-2x}}=\frac{6x-64}{\sqrt{32-2x}},$$

точкой глобального минимума функции $h(x)$ будет $x_*=\dfrac{32}{3}$, $h(x_*)=-\dfrac{64}{3}\sqrt{\dfrac{32}{3}}\approx -69.67$. Для функции $g(x)=x^2-2x-112$, очевидно, справедливо $g(x)\geqslant -113$. Таким образом, при всех допустимых x выражения

$$-2x\sqrt{32-2x},\ x^2-2x-112,\ -2x\sqrt{32-2x}-49$$

лежат в множестве $(-119;+\infty)$, на котором функция $f(x)$ убывает и отрицательна. Тогда

$$(2\log_2 7)\cdot f(-2x\sqrt{32-2x})-5f(-2x\sqrt{32-2x}-49)<(2\log_2 7-5)\cdot f(-2x\sqrt{32-2x}-49)<0$$

при всех допустимых x, поэтому исходное неравенство равносильно неравенству

$$|3f(x^2-2x-112)-f(-2x\sqrt{32-2x})| \leqslant -2f(-2x\sqrt{32-2x}),$$

которое, в свою очередь, эквивалентно системе

$$\begin{cases} 3f(x^2-2x-112) \leqslant -f(-2x\sqrt{32-2x}), \\ f(x^2-2x-112) \geqslant f(-2x\sqrt{32-2x}). \end{cases}$$

Первое неравенство этой системы из-за отрицательности $f(x)$ выполнено при всех допустимых x, второе из-за ее убывания равносильно неравенству $x^2-2x-112 \leqslant -2x\sqrt{32-2x}$. Его можно переписать в виде $(x+\sqrt{32-2x})^2 \leqslant 144$, что эквивалентно системе

$$\begin{cases} \sqrt{32-2x} \leqslant 12-x, \\ \sqrt{32-2x} \geqslant -12-x, \end{cases}$$

решениями которой будут $x \in [-13-\sqrt{57}; 8]$.

10.2. Найдите наименьшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_2(105+2x\sqrt{x+19})^3 + \left|\log_2 \dfrac{105+2x\sqrt{x+19}}{(x^2+x+3)^4}\right|}{9\log_5(76+2x\sqrt{x+19}) - 4\log_2(105+2x\sqrt{x+19})} \geqslant 0.$$

Ответ: $\dfrac{-21+\sqrt{33}}{2} \approx -7.63$.

10.3. Найдите наибольшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_3(100+2x\sqrt{2x+25})^3 + \left|\log_3 \dfrac{100+2x\sqrt{2x+25}}{(x^2+2x+4)^4}\right|}{3\log_6(50+2x\sqrt{2x+25}) - 2\log_3(100+2x\sqrt{2x+25})} \geqslant 0.$$

Ответ. $12+4\sqrt{3} \approx 18.93$.

10.4. Найдите наибольшее из решений неравенства

$$\frac{-\log_3(80-2x\sqrt{30-2x})^2 + \left|\log_3 \dfrac{80-2x\sqrt{30-2x}}{(x^2-2x+29)^3}\right|}{7\log_7(65-2x\sqrt{30-2x}) - 4\log_3(80-2x\sqrt{30-2x})} \geqslant 0.$$

Ответ. $8-\sqrt{13} \approx 4.39$.