Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2018/2019 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (1-й тур)

1.1. Решите уравнение $\sqrt{2-x}=-x$. В ответ запишите целый корень, если он один, и сумму целых корней, если их несколько.
Ответ. -2.

1.2. Решите уравнение $\sqrt{6-x}=-x$. В ответ запишите целый корень, если он один, и сумму целых корней, если их несколько.
Ответ. -3.

2.1. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y=9-3x$ и осями координат.
Ответ. 13.5.

2.2. Найдите площадь треугольника, ограниченного прямой $y=15-5x$ и осями координат.
Ответ. 22.5.

3.1. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x+19y=2019$ найдите такое, для которого величина $|x-y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.
Ответ. 2623.

Решение. Одним из решений уравнения является пара $x=100$, $y=1$. Поэтому множество всех целочисленных решений есть $x=100-19n$, $y=1+20n$, $n\in\mathbb{Z}$. Модуль разности $|x-y|=|100-19n-1-20n|=|99-39n|$ минимален при $n=3$, а соответствующее решение есть $(x,y)=(43,61)$. В ответ записываем $xy=43\cdot 61=2623$.

3.2. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x-19y=2019$ найдите такое, для которого величина $|x+y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.
Ответ. -2623.

3.3. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x+18y=2018$ найдите такое, для которого величина $|x-y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.
Ответ. 2805.

3.4. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x-18y=2018$ найдите такое, для которого величина $|x+y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.
Ответ. -2805.

3.5. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x+17y=2017$ найдите такое, для которого величина $|x-y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.
Ответ. 2989.

3.6. Среди всех целочисленных решений уравнения $20x-17y=2017$ найдите такое, для которого величина $|x+y|$ минимальна. В ответ запишите произведение xy.
Ответ. -2989.

4.1. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 18 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 63 урока больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 42 урока больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?
Ответ. 126.

Решение. Пусть преподаватель привёз с собой x рубашек, y пар брюк, z пар обуви и 2 пиджака. Тогда он может провести $3xyz$ уроков (число 3 означает: 2 урока в каждом из пиджаков и 1 урок без пиджака). Если у него будет на одну рубашку больше, то количество уроков вырастет на $3yz$. Если у него будет на одну пару брюк больше, то количество уроков вырастет на $3xz$. Если у него будет на одну пару обуви больше, то количество уроков вырастет на $3yz$. Таким образом, получаем систему из трёх уравнений: $3yz = 18$, $3xz = 63$, $3xy = 42$. Отсюда $yz = 6$, $xz = 21$, $xy = 14$, и поэтому $(xyz)^2 = 6 \cdot 21 \cdot 14$, $xyz = 42$ (хотя это и не обязательно, но можно посчитать, что $x = 7$, $y = 2$, $z = 3$). Искомая величина: $3xyz = 126$.

Замечание. Возможен вариант понимания условия задачи, в котором требуется найти наибольшее число уроков при условии, что преподаватель возьмёт с собой и рубашек, и брюк, и пар обуви на 1 больше. Соответствующий ответ $3(x+1)(y+1)(z+1) = 288$ также засчитывается как верный.

4.2. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 18 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 54 урока больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 36 уроков больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?

Ответ. 108.

4.3. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 36 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 45 уроков больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 60 уроков больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?

Ответ. 180.

4.4. Преподаватель летнего математического лагеря взял с собой на всё лето несколько рубашек, несколько пар брюк, несколько пар обуви и два пиджака. На каждом уроке он был в брюках, в рубашке и в обуви, а пиджак надевал на некоторых уроках. На любых двух уроках хотя бы один из элементов его одежды или обуви отличался. Известно, что если бы он взял на одну рубашку больше, то смог бы провести на 36 уроков больше; если бы взял на одну пару брюк больше, то смог бы провести на 72 урока больше; если бы взял на одну пару обуви больше, то смог бы провести на 54 урока больше. Какое наибольшее число уроков он смог бы провести при этих условиях?

Ответ. 216.

Замечание. В вариантах 4.2, 4.3, 4.4 ответы 252, 360, 420 соответственно также засчитываются как верные.

5.1. Найдите $\dfrac{S_1}{S_2}$, где

$$S_1 = \frac{1}{2^{2019}} + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2017}} + \ldots + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}, \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2017}} + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2^{2019}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+, +, -, +, +, -, +, +, -, \ldots$).

Ответ. -0.2.

Решение. Для суммы S_1 имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}S_1 - \frac{1}{2^{2020}}\Big) - \frac{1}{2^{2020}}\right) + \frac{1}{2^{2020}} = S_1 - \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2}.$$

Решая это уравнение относительно S_1, получим

$$S_1 = \frac{1-2^{2019}}{7\cdot 2^{2019}}$$

(этот же результат можно получить, применяя формулу для суммы первых n членов геометрической прогрессии). Аналогично для суммы S_2 находим

$$2(2(2S_2-1)-1)+1 = S_2 - \frac{1}{2^{2017}} - \frac{1}{2^{2018}} + \frac{1}{2^{2019}} \quad\Longrightarrow\quad S_2 = \frac{5\cdot(2^{2019}-1)}{7\cdot 2^{2019}}.$$

Поэтому $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{-1}{5} = -0.2.$

5.2. Найдите $\dfrac{S_2}{S_1}$, где

$$S_1 = \frac{1}{2^{2004}} + \frac{1}{2^{2003}} - \frac{1}{2^{2002}} + \ldots + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}, \qquad S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2002}} + \frac{1}{2^{2003}} - \frac{1}{2^{2004}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ. -5.

5.3. Найдите $\dfrac{S_1}{S_2}$, где

$$S_1 = \frac{1}{3^{2019}} + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{1}{3^{2017}} + \ldots + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3}, \qquad S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{2017}} + \frac{1}{3^{2018}} - \frac{1}{3^{2019}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ. $-\frac{5}{11} \approx -0.45$.

5.4. Найдите $\dfrac{S_2}{S_1}$, где

$$S_1 = \frac{1}{3^{2004}} + \frac{1}{3^{2003}} - \frac{1}{3^{2002}} + \ldots + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3}, \qquad S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{2002}} + \frac{1}{3^{2003}} - \frac{1}{3^{2004}}$$

(в обеих суммах знаки слагаемых чередуются так: $+,+,-,+,+,-,+,+,-,\ldots$).

Ответ. -2.2.

6.1. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника CDE, если площади треугольников ABF, ADF и BEF соответственно равны 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{15}{56} \approx 0.27$.

Решение. Пусть $S_1 = S_{AFD} = \frac{1}{2}$, $S_2 = S_{ABF} = 1$, $S_3 = S_{BEF} = \frac{1}{4}$, $S_4 = S_{DEF}$, $S_5 = S_{CDE}$. Так как отношение площадей треугольников с равными высотами равно отношению длин оснований, то

$$\frac{S_4}{S_3} = \frac{FD}{FB} = \frac{S_1}{S_2}, \qquad \frac{S}{S_3+S_4} = \frac{CE}{BE} = \frac{S+S_1+S_4}{S_2+S_3}.$$

Отсюда находим

$$S_4 = \frac{S_1S_3}{S_2}, \quad S = \frac{S_1S_3(S_2+S_3)(S_1+S_2)}{S_2(S_2^2-S_1S_3)} = \frac{15}{56}.$$

6.2. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки E и F. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника AEF, если площади треугольников BCD, BDE и CDF соответственно равны 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{7}{44} \approx 0.16$.

6.3. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника CDE, если площади треугольников ABF, ADF и BEF соответственно равны 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$.

Ответ. $\frac{5}{33} \approx 0.15$.

6.4. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки E и F. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника AEF, если площади треугольников BCD, BDE и CDF соответственно равны 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$.

Ответ. $\frac{4}{35} \approx 0.11$.

6.5. На сторонах AC и BC треугольника ABC взяты соответственно точки D и E. Отрезки AE и BD пересекаются в точке F. Найдите площадь треугольника CDE, если площади треугольников ABF, ADF и BEF соответственно равны 1, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$.

Ответ. $\frac{3}{38} \approx 0.08$.

6.6. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки E и F. Отрезки BF и CE пересекаются в точке D. Найдите площадь треугольника AEF, если площади треугольников BCD, BDE и CDF соответственно равны 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{14}{153} \approx 0.09$.

7.1. Решите уравнение

$$3\cos\frac{4\pi x}{5} + \cos\frac{12\pi x}{5} = 2\cos\frac{4\pi x}{5}\left(3 + \operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{5} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{5}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-11; 19]$.

Ответ. 112.5.

Решение. Обозначим $\dfrac{\pi x}{5} = z$. Тогда, воспользовавшись формулой косинуса тройного угла, получим

$$3\cos 4z + 4\cos^3 4z - 3\cos 4z = 2\cos 4z \cdot (3 + \operatorname{tg}^2 z - 2\operatorname{tg} z),$$

$$(2\cos^2 4z - 3 - \operatorname{tg}^2 z + 2\operatorname{tg} z)\cos 4z = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4z = 0, \\ 2\cos^2 4z = \operatorname{tg}^2 z - 2\operatorname{tg} z + 3, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 4z = 0, \\ 2(\cos^2 4z - 1) = (\operatorname{tg} z - 1)^2. \end{array}\right.$$

Так как во втором уравнении системы левая часть неположительна, а правая неотрицательна, то получаем из первого уравнения $4z = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ (то есть $z = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$), а из второго $z = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $x = \frac{5}{8} + \frac{5k}{4}$ или $x = \frac{5}{4} + 5n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

Из первой серии на отрезок $[-11; 19]$ попадут 24 числа при $k \in [-9; 14]$, их сумма равна

$$\frac{5}{8}\cdot 24 + \frac{5}{4}\cdot(-9 - 8 - \ldots - 1 + 0 + 1 + \ldots + 14) = 15 + \frac{5}{4}\cdot(10 + 11 + \ldots + 14) = 15 + 75 = 90.$$

Из второй серии на отрезок $[-11; 19]$ попадут 6 чисел при $k \in [-2; 3]$, их сумма равна

$$\frac{5}{4}\cdot 6 + 5\cdot(-2 - 1 + 0 + 1 + 2 + 3) = \frac{15}{2} + 15 = \frac{45}{2}.$$

Общая сумма: $90 + \frac{45}{2} = 112.5$.

7.2. Решите уравнение

$$3\cos\frac{2\pi x}{3}+\cos 2\pi x=2\cos\frac{2\pi x}{3}\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}-2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-12;19]$.

Ответ. 86.25.

7.3. Решите уравнение

$$3\cos\frac{4\pi x}{5}+\cos\frac{12\pi x}{5}=2\cos\frac{4\pi x}{5}\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{5}+2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{5}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-13;17]$.

Ответ. 67.5.

7.4. Решите уравнение

$$3\cos\frac{2\pi x}{3}+\cos 2\pi x=2\cos\frac{2\pi x}{3}\left(3+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{6}+2\operatorname{tg}\frac{\pi x}{6}\right).$$

В ответ запишите сумму его корней на отрезке $[-12;18]$.

Ответ. 82.5.

8.1. Известно, что $P(x)$ — многочлен 9-й степени и $P(k)=2^k$ при всех $k=1,2,3,\ldots,10$. Найдите $P(12)$.

Ответ. 4072.

Решение. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n и $P(k)=2^k$ при всех $k=1,2,3,...,n+1$. Найдём $P(n+m+2)$, $m=0,1,\ldots$. По формуле бинома Ньютона при любом $k\in\mathbb{N}$ имеем

$$2^k=2\cdot(1+1)^{k-1}=2\sum_{i=0}^{k-1}C_{k-1}^i=2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}.$$

Заметим, что сумма в правой части этого равенства есть многочлен от k степени $k-1$, причём если добавить к этой сумме слагаемые, соответствующие $i=k,k+1,\ldots,n$, то она не изменится, так как $(k-1)(k-2)\ldots(k-i)=0$ при $i\geqslant k$ (каждое такое произведение содержит множитель $(k-k)=0$). Значит,

$$2^k=2\sum_{i=0}^{k-1}\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}=2\sum_{i=0}^{n}\frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-i)}{i!}\qquad \text{при } k\in\mathbb{N},\quad n\geqslant k-1.$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(x)=2\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-i)}{i!}.$$

Это многочлен степени n, причём по доказанному $Q(k)=2^k$, $k=1,2,3,...,n+1$. Следовательно, $P(x)=Q(x)$ как многочлены степени n, совпадающие в $n+1$ точке.

Подставляя $x=n+m+2$ ($m\geqslant 0$), находим

$$P(n+m+2)=2\sum_{i=0}^{n}C_{n+m+1}^i=2\sum_{i=0}^{n+m+1}C_{n+m+1}^i-2\sum_{i=n+1}^{n+m+1}C_{n+m+1}^i=2^{n+m+2}-2\sum_{i=0}^{m}C_{n+m+1}^i$$

(в последнем равенстве мы снова использовали формулу бинома Ньютона и равенства для биномиальных коэффициентов $C_{n+m+1}^i=C_{n+m+1}^{n+m+1-i}$). При $m=1$ получаем

$$P(n+3)=2^{n+3}-2-2(n+2)=2^{n+3}-2n-6.$$

В частности, для многочлена из условия задачи $n=9$, $P(12)=2^{12}-2\cdot 9-6=4072$.

Другой способ решения. Многочлен степени n однозначно определяется своими значениями в $n+1$ точках $k=1,2,3,\ldots,n+1$. Непосредственной подстановкой этих точек убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет многочлен (интерполяционный многочлен Лагранжа)

$$\begin{aligned}
P(x) = \;& 2\frac{(x-2)(x-3)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{(1-2)(1-3)(1-4)\ldots(1-(n+1))} + 2^2\frac{(x-1)(x-3)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{(2-1)(2-3)(2-4)\ldots(2-(n+1))} + \\
&+ 2^3\frac{(x-1)(x-2)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{(3-1)(3-2)(3-4)\ldots(3-(n+1))} + \ldots + \\
&+ 2^{n+1}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-n)}{(n+1-1)(n+1-2)(n+1-3)\ldots(n+1-n)} = \\
= \;& 2(-1)^n\Bigg(\frac{(x-2)\ldots(x-(n+1))}{n!} - 2^1\frac{(x-1)(x-3)\ldots(x-(n+1))}{1!(n-1)!} + \\
&+ 2^2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)\ldots(x-(n+1))}{2!(n-2)!} - \ldots + (-1)^n 2^n\frac{(x-1)\ldots(x-n)}{n!}\Bigg).
\end{aligned}$$

Его значение в точке $x=n+3$ равно

$$\begin{aligned}
P(n+3) = \;& 2(-1)^n\Bigg(\frac{(n+1)n(n-1)\ldots 3\cdot 2}{n!} - 2^1\frac{(n+2)n(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2}{1!(n-1)!} + \\
&+ 2^2\frac{(n+2)(n+1)(n-1)\ldots\cdot 3\cdot 2}{2!(n-2)!} - \ldots + (-1)^n 2^n\frac{(n+2)(n+1)\ldots\cdot 4\cdot 3}{n!}\Bigg) = \\
= \;& 2(-1)^n(n+2)(n+1)\left(\frac{1}{n+2} - 2^1C_n^1\cdot\frac{1}{n+1} + 2^2C_n^2\cdot\frac{1}{n} + \ldots + (-1)^n 2^n C_n^n\cdot\frac{1}{2}\right) = \\
= \;& 2(-1)^n(n+2)(n+1)\sum_{k=0}^{n}(-2)^k\frac{C_n^k}{n-k+2} = 2(-1)^n(n+2)(n+1)S(1),
\end{aligned}$$

где

$$S(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-2)^k x^{n-k+2}}{n-k+2}.$$

Поскольку

$$S'(x)=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-2)^k x^{n-k+2}}{n-k+2}\right)' = \sum_{k=0}^{n}C_n^k(-2)^k x^{n-k+1} = x(x-2)^n = (x-2)^{n+1}+2(x-2)^n,$$

с учётом условия $S(0)=0$ находим $S(x)=\dfrac{(x-2)^{n+2}-(-2)^{n+2}}{n+2}+2\dfrac{(x-2)^{n+1}-(-2)^{n+1}}{n+1}$. Значит,

$$\begin{aligned}
P(n+3) = \;& 2(-1)^n(n+2)(n+1)\left(\frac{(-1)^{n+2}-(-2)^{n+2}}{n+2} + 2\frac{(-1)^{n+1}-(-2)^{n+1}}{n+1}\right) = \\
= \;& -2(n+1)(n+2)\left(\frac{2^{n+2}-1}{n+2} - \frac{2^{n+2}-2}{n+1}\right) = 2(2^{n+2}-1)-2(n+2) = 2^{n+3}-2n-6.
\end{aligned}$$

8.2. Известно, что $P(x)$ — многочлен 10-й степени и $P(k)=2^k$ при всех $k=1,2,3,\ldots,11$. Найдите $P(13)$.

Ответ. 8166.

8.3. Известно, что $P(x)$ — многочлен 11-й степени и $P(k)=2^k$ при всех $k=1,2,3,\ldots,12$. Найдите $P(14)$.

Ответ. 16356.

8.4. Известно, что $P(x)$ — многочлен 12-й степени и $P(k)=2^k$ при всех $k=1,2,3,\ldots,13$. Найдите $P(15)$.

Ответ. 32738.

9.1. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 7, а расстояние между их центрами равно 13. Центр третьего шара радиуса 5 находится в точке C, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $\sqrt{30} \approx 5.48$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры, а r_1 и r_2 — радиусы шаров, касающихся плоскости ABC в точках B и A соответственно, $r_3 = 5$ — радиус третьего шара. По условию $r_1 + r_2 = r = 7$, $O_1O_2 = d = 13$. Пусть также $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Из треугольников O_1BC и O_2AC по теореме Пифагора получаем

$$(r_3 + r_1)^2 = r_1^2 + a^2, \qquad (r_3 + r_2)^2 = r_2^2 + b^2,$$

откуда $a^2 + b^2 = 2r_3^2 + 2(r_1 + r_2)r_3$. Используя расположение точек O_1, B, A и O_2, находим

$$(r_1 + r_2)^2 + c^2 = d^2.$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2r_3^2 + 2(r_1 + r_2)r_3 + (r_1 + r_2)^2 - d^2 = 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 7 \cdot 5 + 7^2 - 13^2 = 0.$$

Значит, треугольник ABC прямоугольный, а радиус описанной вокруг него окружности равен половине гипотенузы, т. е.

$$R = \frac{c}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - (r_1 + r_2)^2}}{2} = \frac{\sqrt{d^2 - r^2}}{2} = \sqrt{30} \approx 5.48.$$

9.2. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках B и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 7, а расстояние между их центрами равно 17. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке A, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{15} \approx 7.75$.

9.3. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 9, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{305}$. Центр третьего шара радиуса 7 находится в точке C, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{14} \approx 7.48$.

9.4. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках B и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 11, а расстояние между их центрами равно $5\sqrt{17}$. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке A, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{19} \approx 8.72$.

9.5. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 11, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{481}$. Центр третьего шара радиуса 9 находится в точке C, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $3\sqrt{10} \approx 9.49$.

9.6. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках B и C и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 12, а расстояние между их центрами равно $4\sqrt{29}$. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке A, и он касается внешним образом каждого из двух первых шаров. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $4\sqrt{5} \approx 8.94$.

9.7. Два шара касаются плоскости треугольника ABC в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Сумма радиусов данных шаров равна 13, а расстояние между их центрами равно $\sqrt{505}$. Центр третьего шара радиуса 8 находится в точке C, и она касается двух первых сфер. Найдите радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

Ответ. $2\sqrt{21} \approx 9.17$.

10.1. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 11$, $y_1 = 7$, $x_{n+1} = 3x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $y_{1855}^{2018} - 2x_{1855}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1825.

Решение. При всех $n \in \mathbb{N}$ числа x_n и y_n нечётны. Заметим, что

$$2x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 = 2(3x_n + 2y_n)^2 - (4x_n + 3y_n)^2 = 2x_n^2 - y_n^2.$$

Следовательно, $2x_n^2 - y_n^2 = \ldots = 2x_1^2 - y_1^2 = 242 - 49 = 193$.

Пусть $p = 1009$. Это число нечётное и простое, поэтому число $(y_n^2 - 2x_n^2)^p = (-193)^p$ даёт тот же остаток при делении на $2p$, что и $y_n^{2p} - 2^p x_n^{2p}$, так как все биномиальные коэффициенты $C_p^1, \ldots, C_p^{p-1}$ делятся на p. Кроме того, по малой теореме Ферма, 2^p при делении на $2p = 2018$ даёт остаток 2 (и, следовательно, остатки от деления чисел $y_n^{2p} - 2^p x_n^{2p}$ и $y_n^{2p} - 2x_n^{2p}$ одинаковы), а $(-193)^p$ при делении на $2p = 2018$ даёт остаток $2018 - 193 = 1825$.

10.2. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 13$, $y_1 = 9$, $x_{n+1} = 3x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $y_{1711}^{2018} - 2x_{1711}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1761.

10.3. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 9$, $y_1 = 5$, $x_{n+1} = 3x_n + 2y_n$, $y_{n+1} = 4x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $y_{1818}^{2018} - 2x_{1818}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1881.

10.4. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 5$, $y_1 = 11$, $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $x_{1777}^{2018} - 2y_{1777}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1801.

10.5. Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ заданы условиями $x_1 = 7$, $y_1 = 13$, $x_{n+1} = 3x_n + 4y_n$, $y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$, $n \in \mathbb{N}$. Найдите остаток от деления числа $x_{1762}^{2018} - 2y_{1762}^{2018}$ на 2018.

Ответ. 1729.