Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике, 2017/2018 учебный год
Задания отборочного этапа для 10–11 классов с ответами и решениями (1-й тур)

Задания для разминки

1. Вычислите $1-2+3-4+5-6+\ldots-2016+2017$.
Ответ. 1009.

2. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, если сторона её основания равна $\sqrt{3}$, а угол между боковой гранью и основанием равен 60°.
Ответ. 1,5.

Основное задание

1.1. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=17$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. 17.

Решение. Из условия следует, что $x_{n+3}=x_{n+2}-x_{n+1}=x_{n+1}-x_n-x_{n+1}=-x_n$, поэтому $x_{n+6}=-x_{n+3}=x_n$, т. е. последовательность периодична с периодом 6. Поскольку $2018=6\cdot 336+2$, получаем $x_{2018}=x_2=17$.

1.2. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=18$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2017}.
Ответ. 20.

1.3. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=-17$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. -17.

1.4. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=-20$, $x_2=-18$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2017}.
Ответ. -20.

1.5. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=-20$, $x_2=-17$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. -17.

1.6. Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1=20$, $x_2=18$, $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$. Найдите x_{2018}.
Ответ. 18.

2.1. Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел x^2 и $\cos 2x$ меньше, чем $\frac{1}{2}$. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.
Ответ. 0,37 (точное значение: $\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}$).

Решение. Неравенство $\max\{x^2,\cos 2x\}<\frac{1}{2}$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2<\frac{1}{2}, \\ \cos 2x<\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Суммарная длина найденных промежутков равна $2(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{6})=\sqrt{2}-\frac{\pi}{3}\approx 0{,}37$.

2.2. Найдите все значения x, при которых наибольшее из чисел $\sqrt{\frac{x}{2}}$ и $\operatorname{tg} x$ не больше, чем 1. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.
Ответ. 1,21 (точное значение: $2-\frac{\pi}{4}$).

2.3. Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $\frac{1}{x}$ и $\sin x$ больше, чем $\frac{1}{2}$. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.

Ответ. 1,48 (точное значение: $2 - \frac{\pi}{6}$).

2.4. Найдите все значения x, при которых наименьшее из чисел $8 - x^2$ и $\operatorname{ctg} x$ не меньше, чем -1. В ответ запишите суммарную длину найденных промежутков числовой прямой, округлив её при необходимости до сотых.

Ответ. 4,57 (точное значение: $3 + \frac{\pi}{2}$).

3.1. Филателист Андрей решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Андрея, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить второй альбом на 150 марок, так как одного такого же альбома уже не хватало?

Ответ. 223.

Решение. Если искомое число x, то из первого предложения следует, что x — нечетное, а из остальных следует, что число $x + 2$ должно делиться на 3, 5 и 9, т. е. имеет вид $5 \cdot 9 \cdot p$. Значит, $x = 45(2k-1) - 2 = 90k - 47$. По условию $150 < x \leqslant 300$, поэтому $k = 3$. Следовательно, $x = 223$.

3.2. Филателист Борис решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Бориса, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить третий альбом на 160 марок, так как двух таких же альбомов уже не хватало?

Ответ. 439.

3.3. Филателист Валерий решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 5 конвертов, лишними оказались 3 марки; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Валерия, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить третий альбом на 160 марок, так как двух таких же альбомов уже не хватало?

Ответ. 403.

3.4. Филателист Геннадий решил разложить все свои марки поровну в 2 конверта, но оказалось, что одна марка лишняя. Когда он разложил их поровну в 3 конверта, лишней снова оказалась одна марка; когда он разложил их поровну в 7 конвертов, осталось 5 марок; наконец, когда он попытался их разложить поровну в 9 конвертов, осталось 7 марок. Сколько всего марок у Геннадия, если недавно, для того чтобы разместить их все у себя, ему пришлось купить второй альбом на 200 марок, так как одного такого же альбома уже не хватало?

Ответ. 313.

4.1. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите отношение $BE : ED$, если $FG : FE = 4$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 2,24 (точное значение: $\sqrt{5}$).

Решение. Проведём прямую EH, параллельную AB (точка H лежит на стороне BC), и обозначим $BH = a$, $HC = b$, $BE = x$, $ED = y$ (см. рис. 1). По теореме Фалеса искомое отношение равно $t = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$. Из подобия треугольников BEG и AED получаем $\dfrac{x}{a+5b} = \dfrac{y}{a+b}$, значит $t = \dfrac{x}{y} = \dfrac{a+5b}{a+b} = \dfrac{t+5}{t+1} \Leftrightarrow t^2 + t = t + 5 \Leftrightarrow t^2 = 5$. Следовательно, $t = \sqrt{5} \approx 2{,}24$.

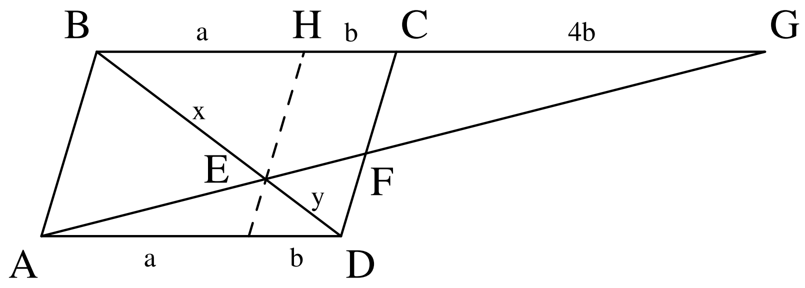

Рис. 1 (к задаче 4)

4.2. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите отношение $FG : FE$, если $BE : ED = \sqrt{7}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 6.

4.3. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите ED, если $FG : FE = 7$, $BE = 8$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 2,83 (точное значение: $2\sqrt{2}$).

4.4. Через вершину A параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD, сторону CD и прямую BC в точках E, F и G соответственно. Найдите BE, если $FG : FE = 9$, $ED = 1$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 3,16 (точное значение: $\sqrt{10}$).

5.1. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{2017}\underbrace{22\ldots22}_{2018}5}$.

Ответ. 6056 (число из условия задачи равно $\underbrace{33\ldots33}_{2017}5$).

Решение. Поскольку

$$\underbrace{11\ldots11}_{2017}\underbrace{22\ldots22}_{2018}5 = \frac{10^{2017}-1}{9}\cdot 10^{2019} + \frac{10^{2018}-1}{9}\cdot 20 + 5 = \frac{10^{4036}+10^{2019}+25}{9} = \left(\frac{10^{2018}+5}{3}\right)^2,$$

число из условия задачи есть $\dfrac{10^{2018}+5}{3} = \dfrac{\overbrace{99\ldots99}^{2018}+6}{3} = \underbrace{33\ldots33}_{2018}+2 = \underbrace{33\ldots3}_{2017}5$, оно является целым, а сумма его цифр равна $2017\cdot 3 + 5 = 6056$.

5.2. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{11\ldots11}_{2018}\underbrace{55\ldots55}_{2017}6}$.

Ответ. 6055 (число из условия задачи равно $\underbrace{33\ldots33}_{2017}4$).

5.3. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{44\ldots44}_{2017}\underbrace{22\ldots22}_{2018}5}$.

Ответ. 12107 (число из условия задачи равно $\underbrace{66\ldots66}_{2017}5$).

5.4. Найдите сумму цифр в десятичной записи целой части числа $\sqrt{\underbrace{44\ldots44}_{2018}\underbrace{88\ldots88}_{2017}9}$.

Ответ. 12109 (число из условия задачи равно $\underbrace{66\ldots66}_{2017}7$).

6.1. Найдите все целые решения уравнения $x \ln 27 \log_{13} e = 27 \log_{13} y$. В ответе укажите сумму $x + y$ для решения (x, y), в котором y — наименьшее, превосходящее 70.

Ответ. 117.

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению $\dfrac{x\ln 27}{\ln 13}=\dfrac{27\ln y}{\ln 13}\Leftrightarrow x\ln 27=27\ln y\Leftrightarrow \ln 27^x=\ln y^{27}\Leftrightarrow 27^x=y^{27}\Leftrightarrow 3^x=y^9$, при этом $y\geqslant 1$, а значит, $x\geqslant 0$. Так как число 3 простое, то или $y=1$ (тогда $x=0$), или y делится на 3 и не имеет других простых делителей. Значит, $y=3^n$, где $n\geqslant 0$. Поэтому $x=9n$. Так как $y>70$, то $n\geqslant 4$, искомое решение: $(x,y)=(36,81)$. В ответ записываем $x+y=117$.

6.2. Найдите все целые решения уравнения $x\ln 81\log_{17}e=40\log_{17}y$. В ответе укажите разность $x-y$ для решения (x,y), в котором y — наименьшее, превосходящее 50.

Ответ. -41.

6.3. Найдите все целые решения уравнения $x\log_{11}27=27\ln y\log_{11}e$. В ответе укажите разность $x-y$ для решения (x,y), в котором y — наибольшее, не превосходящее 90.

Ответ. -45.

6.4. Найдите все целые решения уравнения $x\log_{19}81=40\ln y\log_{19}e$. В ответе укажите сумму $x+y$ для решения (x,y), в котором y — наибольшее, не превосходящее 100.

Ответ. 121.

7.1. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{5x^2+8xy+5y^2-14x-10y+30}{(4-x^2-10xy-25y^2)^{7/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,16 (точное значение: $\frac{5}{32}$).

Решение. Выражение из условия задачи равно

$$\frac{(2x+y)^2+(x+2y)^2-14x-10y+30}{(4-(x+5y)^2)^{7/2}}=\frac{(2x+y-3)^2+(x+2y-1)^2+20}{(4-(x+5y)^2)^{7/2}}.$$

Числитель этой дроби не меньше 20, причём равенство достигается при $2x+y-3=x+2y-1=0$, т. е. при $x=\frac{5}{3}$, $y=-\frac{1}{3}$. При этих же значениях x и y знаменатель достигает своего наибольшего значения $4^{7/2}=2^7=128$. Следовательно наименьшее значение дроби равно $\frac{20}{128}=\frac{5}{32}\approx 0{,}16$.

7.2. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{5x^2-8xy+5y^2-10x+14y+55}{(9-25x^2+10xy-y^2)^{5/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,19 (точное значение: $\frac{5}{27}$).

7.3. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{13x^2+24xy+13y^2-14x-16y+61}{(4-16x^2-8xy-y^2)^{7/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,44 (точное значение: $\frac{7}{16}$).

7.4. Найдите наименьшее значение выражения $\dfrac{13x^2+24xy+13y^2+16x+14y+68}{(9-x^2-8xy-16y^2)^{5/2}}$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,26 (точное значение: $\frac{7}{27}$).

Замечание. В вариантах 7.1 и 7.3 точные значения 0,15625 и 0,4375 соответственно также засчитываются как верные.

8.1. Точки K, L, M, N являются центрами окружностей, вписанных в грани SAB, SAC, SBC и ABC тетраэдра $SABC$. Известно, что $AB=SC=5$, $AC=SB=7$, $BC=SA=8$. Найдите объем тетраэдра $KLMN$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,66 (точное значение: $\frac{\sqrt{11}}{5}$).

Решение. Решим задачу в общем виде. Пусть $BC=SA=a$, $AC=SB=b$, $AB=SC=c$. Грани тетраэдра $SABC$ являются равными треугольниками (такой тетраэдр называется *равногранным*). Проведём через каждое его ребро плоскость, параллельную противоположному ребру (см. рис. 2). Эти шесть плоскостей однозначно определяют параллелепипед, называемый *сопровождающим* для тетраэдра $SABC$. Рёбра тетраэдра являются диагоналями граней параллелепипеда, а рёбра параллелепипеда равны отрезкам, соединяющим центры противоположных граней параллелепипеда (середины скрещивающихся рёбер тетраэдра). Поскольку противоположные рёбра тетраэдр равны, диагонали параллельных граней сопровождающего параллелепипеда также равны, поэтому его грани являются прямоугольниками, а сам параллелепипед — прямоугольный. Обозначив длины ребер параллелепипеда через x, y, z, получаем $x^2+y^2=a^2$, $y^2+z^2=b^2$, $z^2+x^2=c^2$. Складывая три этих равенства, находим $x^2+y^2+z^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$, откуда $x^2=\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$, $y^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $z^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$. Значит, объём сопровождающего параллелепипеда равен $V=xyz=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$, а объём исходного равногранного тетраэдра равен $V_{SABC}=\frac{1}{3}V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$.

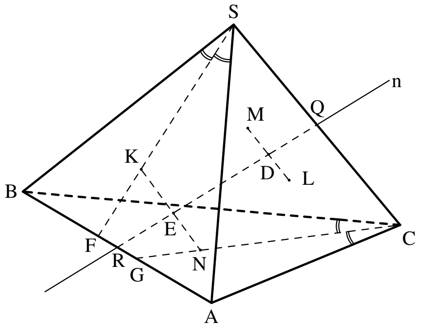

Рис. 1

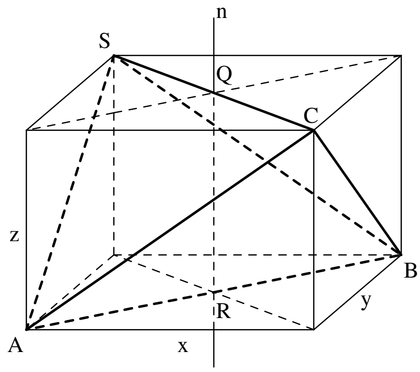

Рис. 2

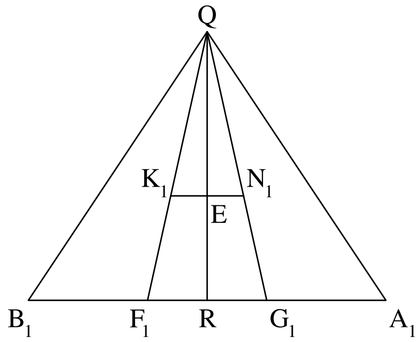

Рис. 3

Из условия задачи следует, что тетраэдр $KLMN$ также равногранный. Выразим длины рёбер параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $KLMN$, через длины x, y, z рёбер параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $SABC$. Обозначим (см. рис. 1) через Q и R середины рёбер SC и AB, а через F и G — основания биссектрис граней SAB и CAB, соответственно. Пусть l — прямая, проходящая через точки Q и R. Так как l перпендикулярна граням сопровождающего параллелепипеда (см. рис. 2), то $l\perp SC$ и $l\perp AB$. Повернём тетраэдр $SABC$ на 180° вокруг прямой l. При этом тетраэдры $SABC$, $KLMN$ (и параллелепипед, сопровождающий $SABC$) перейдут сами в себя. Так как вершины M и L перейдут друг в друга, то отрезок ML перпендикулярен прямой l и пересекает её в своей середине — точке D. Аналогично получаем $KN\perp l$, $E=KN\cap l$, $KE=EN$. Заметим также, что рёбра SC и AB используются в рассуждениях равнозначно, поэтому $QD=RE$.

Пусть Π — плоскость, проходящая через точку Q и перпендикулярная ребру SC. Рассмотрим ортогональную проекцию тетраэдра $SABC$ на плоскость Π (см. рис. 3). Точки A', B', F', G', K', N' — ортогональные проекции точек A, B, F, G, K, N на плоскость Π, точка Q — ортогональная проекция точек S и C, отрезок QR лежит в плоскости Π, и так как R — середина AB, то R — середина $A'B'$, и аналогично E — середина $K'N'$, а R — середина $F'G'$.

Точка K, являясь центром окружности, вписанной в треугольник SAB, делит биссектрису SF в отношении $\frac{FK}{FS}=\frac{c}{a+b+c}$. Так как при ортогональном проектировании отношение длин отрезков сохраняется, то $\frac{FK}{FS}=\frac{F'K'}{F'S'}$, а так как $KN\perp QR$ и $AB\perp QR$, то $K'N'\perp QR$ и $A'B'\perp QR$. Значит, $K'N'\parallel A'B'$ и $\frac{RE}{RQ}=\frac{F'K'}{F'S'}=\frac{FK}{FS}=\frac{c}{a+b+c}$. Значит, ребро DE параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $KLMN$, равно $DE=RQ-RE-DQ=RQ-2RE=z\bigl(1-\frac{2c}{a+b+c}\bigr)=z\frac{a+b-c}{a+b+c}$. Аналогично, рассматривая пары рёбер SA, BC и SB, AC, получаем, что другие рёбра параллелепипеда, сопровождающего тетраэдр $KLMN$, равны соответственно $y\frac{b+c-a}{a+b+c}$, $x\frac{a+c-b}{a+b+c}$. Значит, объём тетраэдра $KLMN$ равен $V_{KLMN}=\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}V_{SABC}=\frac{\sqrt{2}}{12}\cdot\frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}\sqrt{(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$. При $a=8$, $b=7$, $c=5$ получаем $V_{KLMN}=\frac{\sqrt{11}}{5}\approx 0{,}66$.

Замечание. Задачу можно решать и другими способами. Например, чтобы найти длины рёбер тетраэдра $KLMN$, можно поступить так: найти длины биссектрис SA_1 и SC_1 треугольников BSC и ASB соответственно, а также длины отрезков BA_1, BC_1. Далее найти угол B

в треугольнике ABC, а затем отрезок A_1C_1 из треуголльника BA_1C_1. В треугольнике SA_1C_1 по теореме косинусов найти угол S и, зная, в каком отношении точки K и L делят биссектрисы SA_1 и SC_1, найти отрезки SK и SL. Наконец, из треугольника SKL найти длину KL. Остальныё рёбра тетраэдра $KLMN$ находятся аналогично.

8.2. Точки A, B, C, D являются центрами окружностей, вписанных в грани PQS, PRS, QRS и PQR тетраэдра $PQRS$. Известно, что $PQ = RS = 7$, $PR = QS = 8$, $PS = QR = 9$. Найдите объем тетраэдра $ABCD$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 1,84 (точное значение: $\frac{5\sqrt{11}}{9}$).

8.3. В тетраэдре $KLMN$ известно, что $KL = MN = 4$, $KM = LN = 5$, $KN = ML = 6$. Точки P, Q, R, S являются центрами окружностей, вписанных в треугольники KLM, KLN, KMN и LMN. Найдите объем тетраэдра $PQRS$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 0,29 (точное значение: $\frac{7\sqrt{6}}{60}$).

8.4. В тетраэдре $EFGH$ известно, что $EF = GH = 7$, $EG = FH = 10$, $EH = FG = 11$. Точки K, L, M, N являются центрами окружностей, вписанных в треугольники EFG, EFH, EGH и FGH. Найдите объем тетраэдра $KLMN$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 2,09 (точное значение: $\frac{\sqrt{215}}{7}$).

8.5. В тетраэдре $KLMN$ известны длины ребер $KL = MN = 9$, $KM = LN = 15$, $KN = LM = 16$. Точки P, Q, R, S являются центрами окружностей, вписанных в треугольники KLM, KLN, KMN и LMN. Найдите объем тетраэдра $PQRS$. Ответ при необходимости округлите до сотых.

Ответ. 4,85 (точное значение: $\frac{11\sqrt{7}}{6}$).