Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2017/2018 учебного года для 10–11 классов

Условия, решения и ответы к варианту 1, ответы к вариантам 2—4

1. На каком из пяти интервалов, на которые разбивают числовую ось четыре точки

$$x^5 < y^8 < y^3 < x^6,$$

лежит число 0?

Ответ: $(x^5; y^8)$.

Решение. Из условия имеем:
1) $0 > y^8 - y^3 = y^3(y^5 - 1) \Rightarrow 0 < y < 1$;
2) $0 < x^6 - x^5 = x^5(x - 1)$, поэтому есть только две возможности:
 а) $x^5 > 1 \Rightarrow y^8 > x > 1 \Rightarrow |y| > 1$, что противоречит п. 1);
 б) $x^5 < 0 \Rightarrow 0 \in (x^5; y^8)$.

Ответ к варианту 2: $(y^5; x^4)$. *Ответ к варианту 3:* $(x^3; y^6)$. *Ответ к варианту 4:* $(y^3; x^8)$.

2. Какое из чисел больше: $\underbrace{\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\sqrt{13\sqrt{17\ldots}}}}}}_{\text{2018 знаков корня}}$ или $17\sqrt[3]{\frac{13}{17}}$?

Ответ: второе.

Решение. Пусть A — первое число, B — второе. Тогда

$$A = 17^{\frac{1}{2}} \cdot 13^{\frac{1}{4}} \cdot 17^{\frac{1}{8}} \cdot 13^{\frac{1}{16}} \cdot \ldots \cdot 17^{\frac{1}{2^{2017}}} \cdot 13^{\frac{1}{2^{2018}}} = 17^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2017}}} \cdot 13^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{2018}}}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{2017}} < \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots = \frac{1/2}{1-1/4} = \frac{2}{3},$$

и

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{2018}} < \frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3},$$

число A меньше, чем $17^{\frac{2}{3}} \cdot 13^{\frac{1}{3}} = B$.

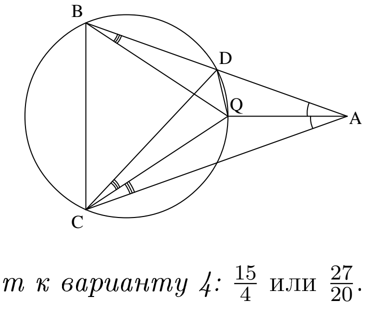
Ответ к варианту 2: второе. *Ответ к варианту 3:* первое. *Ответ к варианту 4:* первое.

3. В треугольнике ABC, площадь которого равна 20, проведена медиана CD. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $AC = \sqrt{41}$, а центр окружности, вписанной в треугольник ACD, лежит на окружности, описанной около треугольника BCD.

Ответ: $\frac{41}{10}$ или $\frac{41}{8}$.

Решение. Пусть Q — центр окружности, вписанной в треугольник ACD. Тогда отрезки AQ и CQ — биссектрисы углов BAC и ACD соответственно, по свойствам вписанных углов $\angle DBQ = \angle DCQ$. Значит, треугольники ABQ и ACQ равны по стороне и двум углам. Следовательно, $AB = AC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

Положим $BC = 2x$, тогда $S_{ABC} = x\sqrt{41 - x^2}$, поэтому с учётом условия получаем уравнение $x\sqrt{41 - x^2} = 20$, имеющее два корня $x = 4$ или $x = 5$. Радиус описанной около треугольника ABC окружности равен



$$R = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} = \frac{41 \cdot 2x}{4 \cdot 20} = \frac{41x}{40}.$$

Подставляя сюда найденные значения x, получаем два возможных ответа, причём обе возможности реализуются.

Ответ к варианту 2: 10 или $\frac{8}{5}$. *Ответ к варианту 3:* $\frac{17}{5}$ или $\frac{17}{3}$. *Ответ к варианту 4:* $\frac{15}{4}$ или $\frac{27}{20}$.

4. Архив фотографий укладывают в порядке их нумерации в одинаковые альбомы, ровно по 4 фотографии на одну страницу. При этом 81-я по счёту фотография попала на 5-ю страницу одного из альбомов, 171-я — на 3-ю страницу другого. Сколько фотографий вмещает каждый альбом?

Ответ: 32.

Решение. Пусть x, y — номера альбомов, в которые попали 81-я и 171-я фотографии соответственно, $n > 4$ — количество страниц в альбоме. Тогда $4n(x-1)+16 < 81 \leqslant 4n(x-1)+20$, $4n(y-1)+8 < 171 \leqslant 4n(y-1)+12$, т. е. $61 \leqslant 4n(x-1) < 65$, $159 \leqslant 4n(y-1) < 163$. Тогда $n(x-1)=16$, $n(y-1)=40$. Из первого неравенства следует, что n может быть равно 1, 2, 4, 8, 16, из второго — 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40. Таким образом, $n=8$, $4n=32$.

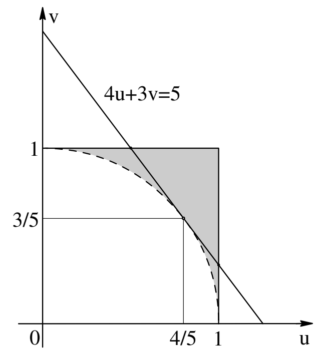
Ответ к варианту 2: 54. *Ответ к варианту 3:* 40. *Ответ к варианту 4:* 42.

5. Решите неравенство $\arcsin\left(\frac{5}{2\pi}\arccos x\right) > \arccos\left(\frac{10}{3\pi}\arcsin x\right)$.

Ответ: $\left[\cos\frac{2\pi}{5};\cos\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\cos\frac{8\pi}{25};\cos\frac{\pi}{5}\right]$.

Решение. Обозначим $u=\frac{5}{2\pi}\arccos x$, $v=\frac{10}{3\pi}\arcsin x$. Тогда справедливо соотношение $4u+3v=5$. Решением неравенства $\arcsin u > \arccos v$ является множество

$$0 \leqslant u \leqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant 1,\ u^2+v^2>1,$$



на чертеже оно закрашено серым. Прямая $4u+3v=5$ имеет общие точки с этим множеством — это отрезок с выколотой точкой $u=4/5$, $v=3/5$. Таким образом.

$$u \in \left[\frac{1}{2};\frac{4}{5}\right)\cup\left(\frac{4}{5};1\right] \ \Leftrightarrow\ \arccos x \in \left[\frac{\pi}{5};\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\frac{8\pi}{25};\frac{2\pi}{5}\right],$$

откуда, с учетом убывания арккосинуса,

$$x \in \left[\cos\frac{2\pi}{5};\cos\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\cos\frac{8\pi}{25};\cos\frac{\pi}{5}\right].$$

Ответ к варианту 2: $\left[\sin\frac{\pi}{5};\sin\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\sin\frac{8\pi}{25};\sin\frac{2\pi}{5}\right]$.
Ответ к варианту 3: $\left[\cos\frac{2\pi}{5};\cos\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\cos\frac{8\pi}{25};\cos\frac{\pi}{5}\right]$.
Ответ к варианту 4: $\left[\sin\frac{\pi}{5};\sin\frac{8\pi}{25}\right)\cup\left(\sin\frac{8\pi}{25};\sin\frac{2\pi}{5}\right]$.

6. Найдите все такие наборы чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, что $x_1 = x_{n+1}$ и при всех $k=1,\ldots,n$ выполнено равенство

$$2\log_2 x_k \cdot \log_2 x_{k+1} - \log_2^2 x_k = 9.$$

Ответ: $x_k = 8, k=1,\ldots,n+1$, или $x_k=\frac{1}{8}, k=1,\ldots,n+1$.

Решение. Требуется решить систему уравнений

$$\begin{cases} 9-2\log_2 x_1\cdot\log_2 x_2+\log_2^2 x_1=0,\\ 9-2\log_2 x_2\cdot\log_2 x_3+\log_2^2 x_2=0,\\ \ldots\\ 9-2\log_2 x_{n-1}\cdot\log_2 x_n+\log_2^2 x_{n-1}=0,\\ 9-2\log_2 x_n\cdot\log_2 x_1+\log_2^2 x_n=0. \end{cases}$$

Замена $a_k=\frac{1}{3}\log_2 x_k$, $k=1,\ldots,n$, приводит систему к виду

$$\begin{cases} a_1+a_1^{-1}=2a_2,\\ \ldots\\ a_{n-1}+a_{n-1}^{-1}=2a_n,\\ a_n+a_n^{-1}=2a_1. \end{cases}$$

Из неравенства для суммы взаимно обратных чисел следует, что либо $a_k \geqslant 1$, $k=1,\ldots,n$, либо $a_k \leqslant -1$, $k=1,\ldots,n$. Решениями системы являются наборы $a_k=1$, $k=1,\ldots,n$ и $a_k=-1$, $k=1,\ldots,n$. Сложим все уравнения системы и перенесём все слагаемые в одну часть равенства, тогда получим

$$a_1-a_1^{-1}+\cdots+a_{n-1}-a_{n-1}^{-1}+a_n-a_n^{-1}=0.$$

Левая часть последнего равенства больше нуля, если хотя бы одно $a_k > 1$, и меньше нуля, если хотя бы одно $a_k < -1$, поэтому других решений, кроме вышеуказанных, система не имеет.

Ответ к варианту 2: $x_k = 9, k = 1, \ldots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{9}, k = 1, \ldots, n+1$.
Ответ к варианту 3: $x_k = 2, k = 1, \ldots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{2}, k = 1, \ldots, n+1$.
Ответ к варианту 4: $x_k = 3, k = 1, \ldots, n+1$, или $x_k = \frac{1}{3}, k = 1, \ldots, n+1$.

7. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = \sin(x + \sin x) + \sin(x - \sin x) + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin\sin x.$$

Ответ: $\dfrac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пользуясь формулой преобразования суммы синусов в произведение, получаем

$$f(x) = 2\sin x \cdot \cos\sin x + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \sin\sin x = g(\sin x),$$

где $g(t) = 2t\cos t + (\frac{\pi}{2} - 2)\sin t$, $t = \sin x \in [-1; 1]$. Функция g нечётная и

$$g'(t) = -2t\sin t + \frac{\pi}{2}\cos t = \frac{\pi}{2}\sin t \left(\operatorname{ctg} t - \frac{4}{\pi} t\right).$$

Поскольку $g'(t) > 0$ при $0 \leqslant t < \frac{\pi}{4}$, $g'(t) < 0$ при $\frac{\pi}{4} < t \leqslant 1$, функция $g(t)$ имеет единственный максимум на отрезке $[0; 1]$ в точке $t = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $g(t) \leqslant g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$, $t \in [0; 1]$. В силу нечётности на отрезке $[-1; 0]$ ситуация симметричная. Покажем, что $g(-1) < g(\frac{\pi}{4})$. Действительно,

$$g(-1) = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sin 1 - 2\cos 1 = 2\sin 1\left(1 - \frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg} 1\right) < 2\sin 1\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right) < 0 < g\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Таким образом, наибольшее значение функции $g(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, а значит, и функции $f(x)$ на всей числовой прямой, равно $\frac{\pi - 2}{\sqrt{2}}$.

Ответ к варианту 2: $\dfrac{2 - \pi}{\sqrt{2}}$. *Ответ к варианту 3:* $\dfrac{4 - 2\pi}{\pi\sqrt{2}}$. *Ответ к варианту 4:* $\dfrac{4\pi - 8}{\pi\sqrt{2}}$.

8. Андрею нравятся все числа, не делящиеся на 3, а Тане нравятся все числа, в которых нет цифр, делящихся на 3.
а) Сколько четырёхзначных чисел нравятся и Андрею, и Тане?
б) Найдите общую сумму цифр всех таких четырёхзначных чисел.

Ответ: а) 810; б) 14580.

Решение. а) Искомые числа должны быть составлены из цифр 1, 2, 4, 5, 7, 8, причём по критерию делимости на 3 в каждом числе сумма цифр не должна быть кратной трём. Цифры 1, 4 и 7 (назовем их цифрами множества A) при делении на 3 дают остаток 1, а цифры 2, 5, 8 (цифры множества B) — остаток 2. Значит, удовлетворяющее условию число должно быть составлено одним из следующих способов:
1) 4 цифры из множества A — таких чисел 3^4;
2) 4 цифры из множества B — таких чисел 3^4;
3) 3 цифры из множества A и одна цифра из множества B — таких чисел $4 \cdot 3^4$;
4) 3 цифры из множества B и одна цифра из множества A — таких чисел $4 \cdot 3^4$.
Всего таких чисел $10 \cdot 3^4 = 810$.

б) Для поиска общей суммы цифр всех этих чисел разобьём их на пары: второе число получается из первого заменой всех цифр по принципу $1 \leftrightarrow 8$, $2 \leftrightarrow 7$, $4 \leftrightarrow 5$. Например, число 1545 имеет пару 8454, число 5271 имеет пару 4728, и т. д. Сумма цифр любой пары равна $9 \cdot 4$, а число таких пар равно $\frac{10 \cdot 3^4}{2}$. Значит, искомая сумма всех цифр равна $\frac{9 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 3^4}{2} = 20 \cdot 3^6 = 14580$.

Ответ к варианту 2: а) 160; б) 2880.
Ответ к варианту 3: а) 810; б) 14580.
Ответ к варианту 4: а) 160; б) 2880.