ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

заключительный этап 2016/2017 учебного года

Решения задач по математике

9 класс

1. На доске было написано 21 последовательное натуральное число. Когда одно из чисел стерли, сумма оставшихся стала равна 2017. Какое число стерли?
   Ответ: 104.
   Решение: Пусть на доске были написаны числа N-10, N-9,…,N, …, N+10. Их сумма равна 21N. Когда стерли одно их этих чисел – x - сумма стала равна 2017, 21N-x=2017. Следовательно, x = 21N-2017 , поскольку это одно из этих чисел, получаем $N-10 \leq 21N-2017 \leq N+10$. Решим неравенства $\frac{2007}{20} \leq N \leq \frac{2027}{20}$, откуда N =101, следовательно, x=21*101-2017 =104.

2. Прямая проходит через точку с координатами (10; 0) и пересекает параболу $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2. Найдите $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.
   Ответ: 0.1.
   Решение. Точки x_1,x_2, являются решениями уравнения $x^2 = k(x-10)$, где k – коэффициент наклона прямой. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = k, x_1x_2 = 10k$. Следовательно, $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{k}{10k} = \frac{1}{10}$.
3. Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?
   Ответ: 240.
   Решение: Всего в 32-угольнике 32*(32-3) /2 = 464 диагоналей. Разобьем стороны на 16 пар параллельных сторон. Несложно заметить, что если зафиксировать какую-то пару, т.е. 4 вершины, то оставшиеся вершины можно соединить попарно диагоналями, параллельными этой паре. Их всего будет (32-4)/ 2 =14. Значит диагоналей, параллельных какой-то стороне – 14*16=224. А не параллельных – 464-224=240.
4. Про натуральные числа *m* и *n* известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение *m+n.*
   Ответ: 60.
   Решение: Очевидно, если *m,n* содержат простые сомножители, не равные 3 или 5, то на них можно сократить (и уменьшить m+n).
   Пусть $n = 3^a \cdot 5^b, m = 3^c \cdot 5^d$. Тогда из условия вытекает, что 3*a*+1=2*c*, 3*b*=2*d*+1.
   Наименьшие возможные значения: *a*=1, *b*=1, *c*=2, *d*=1, откуда *n*=15, *m*=45.
5. Петя и Вася играют в игру. На доске написано число: 11223334445555666677777. За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает

тот, кто сотрет последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

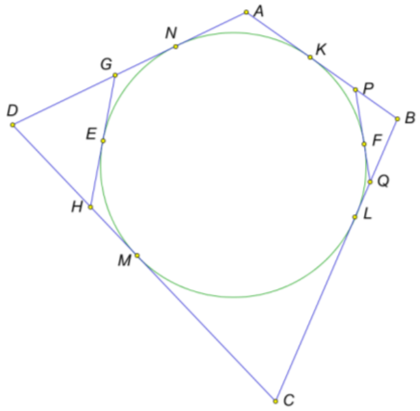
Ответ: Да, может.

Решение: Первым ходом Петя может, например, стереть все цифры 7. Запишем оставшиеся цифры в виде:

11 333 5555 | 6666 444 22.

После этого Петя симметрично (относительно средней черты) повторяет ходы Васи

6. Из отрезков длин 3, 5, 7 и 9 составлен четырехугольник, в который вписана окружность. К ней проведены две касательные: одна пересекает одну пару соседних сторон четырёхугольника, а другая — пару оставшихся. Найдите разность периметров треугольников, отсечённых от четырёхугольника этими касательными.



Ответ: 4 или 8.

Решение: Обозначим точки касания со сторонами AB=3, BC=5, CD=9, DA=7 как K,L,M,N, соответственно (см. рис.). Пусть касательные в точках E, F отсекают треугольники DGH и PBQ. Заметим, что периметр DGH равен 2DM, а периметр PBQ – 2BL, т.е. их разность 2(DM-BL). Обозначим AK=AN=x, BK=BL=y, CL=CM=z, DM=DN=t. Получим уравнения: x+y=3, y+z=5, z+t=9, t+x=7. Вычитая из третьего уравнения второе, получим t-y=4, откуда 2(DM-BL) =8. Проводя с другой стороны касательные, получим аналогично 2*(*CL*-*AN*)=4.

7. Про функцию y = f(x) известно, что она определена и непрерывна на всей числовой прямой, нечётна и периодична с периодом 5, а также что $f(-1) = f(2) = -1$. Какое наименьшее число корней может иметь уравнение $f(x) = 0$ на отрезке [1755; 2017]?

Ответ: 210.

Решение. Поскольку функция f нечётна и определена в нуле, получаем $f(0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. В силу 5-периодичности тогда имеем $f(5) = f(0) = 0$. Используем ещё раз нечётность: $f(1) = -f(-1) = 1$, и опять в силу 5-периодичности $f(3) = f(-2) = 1$, $f(4) = f(-1) = -1$. Итак, в точках 1, 2, 3 и 4 значения функции равны соответственно 1, −1, 1 и −1. Значит, на каждом из трёх интервалов между этими точками есть не менее одного нуля функции *f*. Итого на периоде [0; 5) у функции не менее 4 нулей (ясно, что эта оценка достижима: можно взять, например, кусочно-линейную функцию, у неё будет ровно 4 нуля). На промежутке [1755; 2015) период помещается 52 раза (на нём не менее $52 \cdot 4 = 208$ нулей), плюс нуль в точке 2015 и хотя бы один на интервале (2016; 2017). Итого не менее 210 нулей.