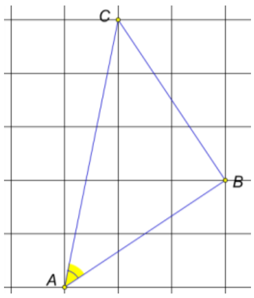
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
«ЛОМОНОСОВ»

заключительный этап 2016/2017 учебного года

Решения задач по математике

7-8 классы

1. На клетчатой бумаге нарисовали треугольник *ABC* (см. рис.). Найдите величину угла $\angle A$.

   Ответ: 45°.

   Решение: Заметим, что AB=BC. Также, несложно показать, что $\angle B = 90°$. Отсюда, учитывая, что сумма углов треугольника равна 180, получаем ответ.

2. А у нас сегодня кошка родила вчера котят! Известно, что два самых легких весят в сумме 80 г., четыре самых тяжелых – 200 г., а суммарный вес всех котят равен *X* г. При каком наименьшем *X* по этим данным нельзя однозначно определить, сколько котят родила кошка?

   Ответ: X=480.

   Решение: Упорядочим котят по весу: $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. По условию $a_1 + a_2 = 80$, следовательно, $a_3, \ldots, a_n \geq 40$. Так же по условию $a_{n-3} + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 200$, следовательно, $a_1, \ldots, a_{n-4} \leq 50$. Получаем, что $\mathrm{a}_3 + \ldots + \mathrm{a}_{n-4} = \mathrm{X} - 280 = \mathrm{X}_1$, при этом каждое слагаемое в левой части принадлежит отрезку [40; 50]. Значит $40\times(n-6) \leq X_1 \leq 50\times(n-6)$, откуда вытекает, что *n*-6 лежит на [X_1/50; X_1/40]. Длина этого отрезка равна X_1/200, значит два различных целых числа могут попасть только при $X_1 \geq 200$. Берем X_1=200 и проверяем, что такие наборы весов существуют: 40x7+50x4=480 и 40x2+50x8=480. Для полноты решения надо добавить, что если X=200, то котят 4, если 200<X<280, то котят 5 и при X=280 котят 6, т.е. количество котят тоже определяется однозначно.

3. Найдите двузначное число, цифры которого различны и квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

   Ответ: 27.

   Решение: Запишем условие в виде $\overline{AB}^2 = (A+B)^3$. Заметим, что сумма цифр (A+B) не превосходит 17, т.е. $\overline{AB}^2 \leq 17^3$. Кроме того, это число $\overline{AB}^2 = n^6$, где *n* - некоторое натуральное число, которое не превосходит 4. Но 1, 2 не подходят, т.к. их кубы однозначны. Осталось 3 и 4, непосредственная проверка показывает, что $27^2 = (2+7)^2 = 729$.

4. На окружности отмечено 100 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причем у любого отрезка один конец синий, а другой – красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

   Ответ: 50.

Решение: Возьмем 50 красных и 50 синих точек. Первую красную точку не соединяем ни с какой другой, вторую с одной синей, …, 50-ю – с 49 синими. Очевидно, что больше 50 красных точек быть не может, т.к. если их 51 или больше, то синих не более 49, следовательно, количество вариантов соединения не более 50, т.е. (по принципу Дирихле) какие-то две красные точки будут принадлежать одинаковому количеству отрезков.

5. Сколько диагоналей в правильном 32-угольнике не параллельны ни одной из сторон этого 32-угольника?
   Ответ: 240.
   Решение: Всего в 32-угольнике 32*(32-3) /2 = 464 диагоналей. Разобьем стороны на 16 пар параллельных сторон. Несложно заметить, что если зафиксировать какую-то пару, т.е. 4 вершины, то оставшиеся вершины можно соединить попарно диагоналями, параллельными этой паре. Их всего будет (32-4)/ 2 =14. Значит диагоналей, параллельных какой-то стороне – 14*16=224. А не параллельных – 464-224=240.
6. Про натуральные числа *m* и *n* известно, что $3n^3 = 5m^2$. Найдите наименьшее возможное значение *m+n.*
   Ответ: 60.
   Решение: Очевидно, если *m,n* содержат простые сомножители, не равные 3 или 5, то на них можно сократить (и уменьшить m+n).
   Пусть $n = 3^a \cdot 5^b, m = 3^c \cdot 5^d$. Тогда из условия вытекает, что 3*a*+1=2*c*, 3*b*=2*d*+1. Наименьшие возможные значения: *a*=1, *b*=1, *c*=2, *d*=1, откуда *n*=15, *m*=45.
7. Петя и Вася играют в игру. На доске написано число: 1122333444555566677777. За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает тот, кто сотрет последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?
   Ответ: Да, может.
   Решение: Первым ходом Петя может, например, стереть все цифры 7. Запишем оставшиеся цифры в виде:

   11 333 5555 | 6666 444 22.

   После этого Петя симметрично (относительно средней черты) повторяет ходы Васи.