

Олимпиада школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

Задания заочного этапа 2016/2017 учебного года для 5-6 класса

1. Замените буквы А, Б, В, Г, Д, Е цифрами (разным буквам соответствуют разные цифры), так, чтобы разность трехзначных чисел АБВ-ГДЕ принимала наименьшее возможное положительное значение. В ответе укажите значение этой разности.

ОТВЕТ:3.

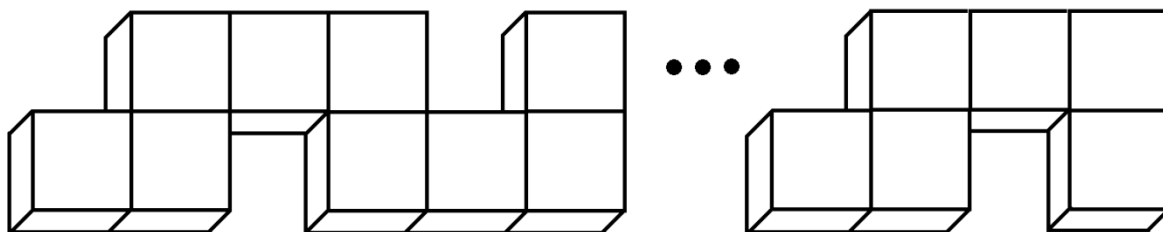
Решение: Подойдет, например 401-398. Очевидно, что меньшее значение получить нельзя.

2. Индиана Джонс добрался до заброшенного храма в джунглях и зашел в сокровищницу. Там стояло 5 шкатулок, причем известно, что только в одной из них клад, а остальные обрушивают каменную плиту на голову того, кто пытается их открыть. Шкатулки занумерованы слева направо. Первая, четвертая и пятая сделаны из кедра, вторая и третья - из сандалового дерева. На первой написано "Клад во мне или в 4-й шкатулке"; на второй написано "Клад в шкатулке слева от меня"; на третьей написано "Клад во мне или в крайней справа шкатулке"; на четвертой написано "В шкатулках, стоящих левее меня клада нет"; на пятой шкатулке написано "На всех остальных шкатулках написана ложь". Последний хранитель храма, умирая, поведал Индиане тайну: на шкатулках из кедра и из сандала написано одинаковое количество ложных утверждений. В какой шкатулке клад?

ОТВЕТ 2.

Решение: Последовательно рассмотрим варианты, каждый кроме второго приводит к противоречию.

3. На то, чтобы покрасить кубик со всех сторон уходит 60 граммов краски. Сколько краски потребуется, чтобы покрасить «змейку», составленную из 2016 таких кубиков? На рисунке показаны начало и конец змейки, а остальные кубики заменены на многоточие.



ОТВЕТ: 80660.

Решение: Разобьем змейку на 336 периодических фрагментов, каждый из которых содержит 6 кубиков. На покраску периодического фрагмента из 6 кубиков уходит 240 гр. краски. Получим 80640 г., учитывая, что на покраску торцов требуется еще 20 г., получим ответ.

4. Известно, что $x + y + z = 2016$ и $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{1}{32}$. Найдите $\frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x}$

ОТВЕТ:60.

Решение: Прибавим по 1 к каждой дроби, получим $\frac{z}{x+y} + 1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} + 1 = \frac{x+y+z}{x+y} + \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} = 2016 \cdot \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) = \frac{2016}{32} = 63.$

5. Найдите все натуральные числа N , такие, что остаток от деления 2017 на N равен 17. В ответе укажите количество таких N .

ОТВЕТ 13.

Решение – В качестве N подойдут все положительные делители числа 2000, большие 17. Делители 2000 имеют вид $2^a \cdot 5^b$, где $a=0,1,2,3,4$ и $b=0,1,2,3$. Всего их будет 20 штук, но следует отбросить 1,2,4,5,8,10 и 16.

6. Имеется 5 одинаковых вёдер, максимальная вместимость каждого из которых - некоторое целое число литров, и 30-литровая бочка, в которой находится целое число литров воды. Из бочки разлили всю воду по вёдрам, при этом первое ведро оказалось заполненным наполовину, второе - на треть, третье - на четверть, четвертое - на одну пятую, пятое - на одну шестую своего объёма. Сколько литров воды было в бочке?

ОТВЕТ:29.

Решение $-\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = \frac{87x}{60} = \frac{29x}{20}$ будет целым только при x кратном 20. Но $x > 20$ брать нельзя, т.к. сумма получится больше 30 литров.