

## ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

заключительный этап 2016/2017 учебного года

### Решения задач по математике

#### 5-6 классы

1. Следователь Подберезовиков преследует Максима Деточкина (каждый едет на своей машине). В начале оба ехали по шоссе со скоростью 60 км/ч, при этом Подберезовиков отставал от Деточкина на 2 км. На въезде в город каждый из них снизил скорость до 40 км/ч, а на выезде из города, оказавшись на хорошей трассе, каждый увеличил скорость до 70 км/ч. Когда трасса закончилась, на границе с проселочной дорогой каждому пришлось снова снизить скорость до 30 км/ч. Каким стало расстояние между ними на проселочной дороге?

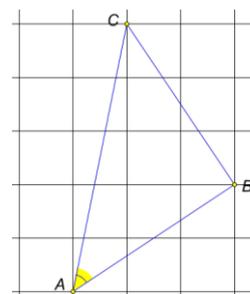
**Ответ:** 1км.

**Решение:** В момент, когда Деточкин въехал в город, Подберезовиков отставал от него на 2 км. Подберезовиков проехал их за  $\frac{2}{60}$  часа, за это время Деточкин проехал  $\frac{2}{60} \cdot 40$  км. Т.е. расстояние уменьшилось на  $\frac{40}{60}$ . Аналогично, при выезде из города и переходе на проселочную дорогу расстояние умножается на  $\frac{70}{40}$  и на  $\frac{30}{70}$ . В итоге  $2 \times \frac{40}{60} \times \frac{70}{40} \times \frac{30}{70} = 1$  км.

2. На клетчатой бумаге нарисовали треугольник ABC (см. рис.).  
Найдите величину угла  $\angle A$ .

**Ответ:**  $45^\circ$ .

**Решение:** Заметим, что  $AB=BC$ . Также, несложно показать, что  $\angle B = 90^\circ$ . Отсюда, учитывая, что сумма углов треугольника равна 180, получаем ответ.



3. А у нас сегодня кошка родила вчера котят! Известно, что два самых легких весят в сумме 80 г., четыре самых тяжелых – 200 г., а суммарный вес всех котят равен 500г. Сколько котят родила кошка?

**Ответ:** 11.

**Решение:** Два самых легких весят 80 г., следовательно, остальные весят не менее 40 г. каждый. Аналогично получаем, что все, кроме 4 самых тяжелых весят не более 50г.

Рассмотрим котят, которые не входят в состав 2 самых легких и 4 самых тяжелых. Их общий вес равен  $500-200-80=220$ г. Значит их 5 штук, т.к. если их 4, то вес не может быть более  $4 \times 50 = 200$ г., а если их 6, то их вес не менее  $6 \times 40 = 240$ г. Тогда всего котят 11.

4. Найдите двузначное число, цифры которого различны и квадрат которого равен кубу суммы его цифр.

**Ответ:** 27.

**Решение:** Запишем условие в виде  $\overline{AB}^2 = (A + B)^3$ . Заметим, что сумма цифр  $(A+B)$  не превосходит 17, т.е.  $\overline{AB}^2 \leq 17^3$ . Кроме того, это число  $\overline{AB}^2 = n^6$ , где  $n$  -

некоторое натуральное число, которое не превосходит 4. Но 1, 2 не подходят, т.к. их кубы однозначны. Осталось 3 и 4, непосредственная проверка показывает, что  $27^2 = (2 + 7)^2 = 729$ .

5. На окружности отмечено 25 точек, которые покрашены в красный или синий цвет. Некоторые точки соединены отрезками, причем у любого отрезка один конец синий, а другой – красный. Известно, что не существует двух красных точек, принадлежащих одинаковому количеству отрезков. Каково наибольшее возможное число красных точек?

**Ответ:** 13.

**Решение:** Возьмем 13 красных и 12 синих точек. Первую красную точку не соединяем ни с какой другой, вторую с одной синей, ..., 13-ю – с 12 синими. Очевидно, что больше красных быть не может, т.к. если их более 13, то количество вариантов соединения менее 13, т.е. (по принципу Дирихле) какие-то две красные точки будут принадлежать одинаковому количеству отрезков.

6. Петя и Вася играют в игру. На доске написано число: 11223334445555666677777. За один ход разрешается стереть любое количество одинаковых цифр. Выигрывает тот, кто сотрет последнюю цифру. Петя ходит первым. Может ли он так ходить, чтобы гарантированно выиграть?

**Ответ:** Да, может.

**Решение:** Первым ходом Петя может, например, стереть все цифры 7. Запишем оставшиеся цифры в виде:

11 333 5555 | 6666 444 22.

После этого Петя симметрично (относительно средней черты) повторяет ходы Васи.