МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по математике

2015/2016 учебный год

http://olymp.msu.ru

7-8 класс

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»

Отборочный этап 2015/2016 учебного года

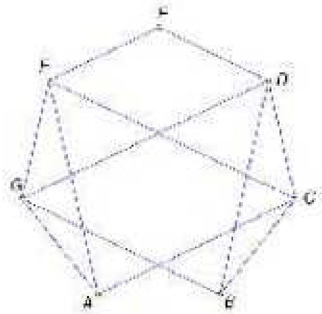
Ответы и решения

7-8 Классы

1. В слове «ЛОМОНОСОВ» замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные — разными, так, чтобы при этом получилось наибольшее возможное число, кратное 90.

   Ответ: 987858180.

2. В правильном 7-угольнике провели диагонали AC, AF, BD, BG, CF, DF и DG как показано на рисунке. а) Раскрасьте вершины 7-угольника в красный, синий и зеленый цвета, так, чтобы любые две вершины, соединенные отрезком, были раскрашены в разные цвета. б) Найдите количество вариантов такой раскраски.



   Ответ: 6.

   Решение: Точки A, C и F красим в три различных цвета, тогда цвета всех других точек определяются однозначно.

3. В последовательности, которая начинается с чисел 2013, 2014, 2015, сумма любых семи последовательных членов составляет 2016. Какое число стоит на 2017 месте?

   Ответ: 2013.

   Решение: Несложно заметить, что последовательность будет периодичной с периодом 7.

4. Круг разбили на 4 равных сектора по 90°. Сколькими способами можно его раскрасить, если есть 7 цветов и каждый сектор можно красить в любой цвет? Раскраски, которые совпадают при повороте круга, считать одинаковыми.

   Ответ: 616.

   Решение: Есть 7 раскрасок в 1 цвет (которые мы считаем по одному разу), $7 \times 6 = 42$ «шахматные» раскраски в два цвета (которые мы считаем по два раза). Если их отбросить, то останутся $7^4 - 7 - 42 = 2352$ раскраски, которые мы посчитали по 4 раза. Значит всего $2352/4 + 42/2 + 7 = 616$ различных раскрасок.

5. Длины всех сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, при этом длина одного из катетов выражается простым числом, большим 3. Какие остатки при делении на 12 может давать число, выражающее длину другого катета?

   Ответ: 0.

   Решение: Один из катетов должен быть кратен трем и один четырем, а простое число — не кратно.

6. Число $\underbrace{99\ldots9}_{999\text{ цифр}}$ разложили на простые сомножители. Найдите количество сомножителей, равных 3, в этом разложении.

   Ответ: 3^5.

   Решение: Обозначим $I(n) = \underbrace{11\ldots1}_{n\text{ цифр}}$. Легко показать, что если $I(n)$ кратно 3^k, то $I(3n)$ кратно 3^{k+1}. Тогда $I(111) \vdots 3$, $I(333) \vdots 3^2$, $I(999) \vdots 3^3$. Число из условия задачи равно $9I(999)$, поэтому оно кратно 3^5.

7. В одном интернет-сообществе каждый из участников имеет ровно 22 друга (дружба обоюдная). При этом если два члена сети дружат, то у них нет общих друзей, а если не дружат, то у них ровно 6 общих друзей. Сколько человек в этом интернет-сообществе?

   Ответ: 100.

   Решение: Пусть в сообществе N людей. Подсчитаем число упорядоченных троек $a - b - c$, в которых b дружит с a и с c. Зафиксируем b (это можно сделать N способами). Тогда для него получится $22 \cdot 21 = 462$ таких троек. Итого получается $462N$. С другой стороны можно сначала выбрать a — N способов, потом c — $N - 23$ способа (надо вычесть его друзей и его самого). Тогда b можно выбрать 6 способами, итого $6N(N-23)$.

   Получим уравнение $462N = 6N(N-23)$, откуда $N = 100$.

8. Сколькими различными способами можно разменять 1000 рублей, используя только рублевые, 5-рублевые и 10-рублевые монеты?

Ответ: 10201.

Решение: Задача сводится к нахождению числа решений неравенства $10x + 5y \leqslant 1000$ в неотрицательных целых числах $x, y \geqslant 0$. Преобразовав к виду $y \leqslant 200 - 2x$, получим, что при $x = 0$ решений 201, при $x = 1$ решений 199,... , при $x = 100$ — решение единственно. Всего получится $1 + 3 + ... + 201 = (1 + 201) * 101/2 = 101^2 = 10201$.

2015/2016 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по математике

5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **91** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **70** баллов до **90** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

не присуждать.

ПРИЗЁР (диплом II степени):

***100** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **80** баллов до **99** баллов включительно.*

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по математике*