Заключительный этап. 10 – 11 классы.

Решения и ответы варианта 151; ответы ко всем вариантам.
Сами варианты приведены ниже.

1. В ящике лежат сто разноцветных шариков: 28 красных, 20 зелёных, 13 жёлтых, 19 синих, 11 белых и 9 чёрных. Какое наименьшее число шариков надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них заведомо оказалось не менее 15 шариков одного цвета?

Ответ: 76. **Решение.** Наихудший вариант: будет вытащено 14 красных, 14 зелёных, 13 жёлтых, 14 синих, 11 белых и 9 чёрных шариков – всего 75 шариков. Следующий шарик обязательно будет 15-м шариком какого-то одного из цветов: либо красным, либо зеленым, либо синим.

Ответ варианта 152: 109.

Ответ варианта 153: 83.

Ответ варианта 154: 98.

2. Найдите главный (наименьший положительный) период функции

$$y=\left(\arcsin\left(\sin\left(\arccos\left(\cos 3x\right)\right)\right)\right)^{-5}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$. **Решение.** Число $\frac{2\pi}{3}$ является периодом функции $\cos 3x$. Так как множество значений функции $z=\arccos\left(\cos t\right)$ равно $\left[0;\pi\right]$, а функция

$\arcsin\left(\sin z\right)=\left[\begin{array}{l} z,\ \text{при}\ \ 0\le z\le\frac{\pi}{2}, \\ \pi-z,\ \text{при}\ \ \frac{\pi}{2}\le z\le\pi, \end{array}\right.$ то $\frac{\pi}{3}$ будет периодом функции *y*. Так как точки вида

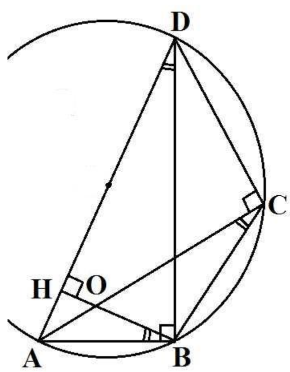
$\frac{\pi n}{3}$, $n\in Z$ не принадлежат области определения функции *y*, то $\frac{\pi}{3}$ – наименьший период.

Ответ варианта 152: $\frac{\pi}{4}$.

Ответ варианта 153: $\frac{\pi}{6}$.

Ответ варианта 154: $\frac{\pi}{4}$.

3. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* диагонали *AC* и *DB* перпендикулярны сторонам *DC* и *AB* соответственно. Из точки *B* проведён перпендикуляр на сторону *AD*, пересекающий *AC* в точке *O*. Найдите *AO*, если $AB=4$, $OC=6$.



Ответ: 2. **Решение.** Так как $\angle ABD=\angle ACD=90^\circ$, то четырёхугольник вписан в окружность с диаметром *AD*. Поэтому $\angle ACB=\angle ADB$ – как опирающиеся на одну дугу. Так как *BH* – высота в прямоугольном ΔABD, то $\angle ADB=\angle ABH$. Тогда треугольники ABO и ACB подобны по двум углам, и выполняются соотношения: $\frac{AB}{AO}=\frac{AC}{AB}\ \Leftrightarrow\ \frac{4}{AO}=\frac{AO+6}{4}$

$\Leftrightarrow\ AO^2+6AO-16=0\ \Leftrightarrow\ AO=-8$ или $AO=2$. Ответ: $AO=2$.

Ответ варианта 152: 9.

Ответ варианта 153: 1.

Ответ варианта 154: 12.

4. Найдите наибольшее значение $x+y$, если числа x и y удовлетворяют неравенству

$$\log_{\frac{x^2+y^2}{2}} y \geq 1.$$

Ответ: $1+\sqrt{2}$ **Решение.** Неравенство равносильно системе $\begin{cases} \dfrac{y-\frac{x^2+y^2}{2}}{\frac{x^2+y^2}{2}-1} \geq 0, \\ (x;y) \neq (0;0), \\ x^2+y^2 \neq 2, \\ y>0. \end{cases}$

Множеством решений этой системы являются пары точек $(x;y)$, лежащие внутри верхнего полукруга (без границы) $x^2+y^2=2$, $y>0$, но вне круга $x^2+(y-1)^2=1$ или внутри круга $x^2+(y-1)^2=1$, но вне верхнего полукруга (без границы) $x^2+y^2=2$, $y>0$.

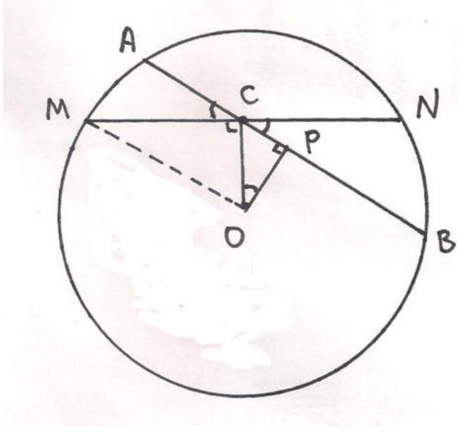
Найдём максимальное значение суммы $x+y$. Уравнение $x+y=a$ задаёт семейство параллельных прямых, пересекающих ось OX под углом $135°$. Максимальное значение a, при котором прямая из этого семейства имеет непустое пересечение с множеством решения неравенства, находится из условия касания прямой $x+y=a$ и окружности $x^2+(y-1)^2=1$. Его можно найти либо из геометрических соображений, либо подставив $y=a-x$ в уравнение окружности и определив a, при котором дискриминант равен нулю. При этом из двух значений $a=1\pm\sqrt{2}$ выбираем наибольшее: $a=1+\sqrt{2}$. Необходимо проверить, что при таком a прямая не пересекает окружность $x^2+y^2=2$, что гарантирует, что касание первой окружности нашим семейством прямых происходит раньше касания второй.

Ответ варианта 152: $-1-\sqrt{2}$.

Ответ варианта 153: $-1-\sqrt{2}$.

Ответ варианта 154: $1+\sqrt{2}$.

5. Отрезок $AB=8$ пересекает плоскость α под углом $30°$ и делится этой плоскостью в отношении $1:3$. Найдите радиус сферы, проходящей через точки A и B и пересекающей плоскость α по окружности наименьшего радиуса.



Ответ: $2\sqrt{7}$. **Решение.** Обозначив точку пересечения AB с плоскостью α через C, получим $AC=2$, $BC=6$. В пересечении сферы с плоскостью получается некоторая окружность. Проведём через C диаметр MN этой окружности. Тогда AB и MN – хорды сферы, и по свойству пересекающихся хорд: $MC\cdot CN = AC\cdot CB = 12$. Так как $MN = MC+CN \geq 2\sqrt{MC\cdot CN} = 4\sqrt{3}$, то минимальный радиус окружности больше или равен $2\sqrt{3}$ и значение $2\sqrt{3}$ достигается при $MC=CN=2\sqrt{3}$, то есть C – центр этой окружности.

Так как $\angle COP = 90° - \angle OCP = \angle NCP = 30°$, то

$OC = 2 \cdot CP$. При этом $CP = \frac{AB}{2} - AC = 2$. Значит, $R^2 = OM^2 = MC^2 + OC^2 = 12 + 4^2 = 28$.

Ответ варианта 152: $2\sqrt{19}$.

Ответ варианта 153: $2\sqrt{13}$.

Ответ варианта 154: $\sqrt{39}$.

6. Для любого натурального *n* и для любого набора чисел x_1, x_2, …, x_n из отрезка $[0; 3]$ уравнение $\sum_{i=1}^{n} |x - x_i| = an$ имеет решение *x*, принадлежащее отрезку $[0; 3]$. Укажите, какие из следующих значений *a* удовлетворяют этому условию:

a) $a = 0$, b) $a = \frac{3}{2}$, c) $a = 2$.

Ответ: только $a = \frac{3}{2}$. **Решение.** Для доказательства невозможности любого *a*, кроме $a = \frac{3}{2}$, можно привести пример: $n = 2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} |x - x_i| = |x - 0| + |x - 3| = 3$ для любого $x \in [0; 3]$, и получающееся уравнение $3 = 2a$ не имеет решений при всех *a*, кроме для $a = \frac{3}{2}$. Теперь докажем, что при $a = \frac{3}{2}$ решения всегда будут.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x - x_i|$. Тогда $f(0) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |-x_i| = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$, $0 \le f(0) \le 3$.

$$f(3) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |3 - x_i| = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (3 - x_i) = \frac{1}{n} \cdot \left(3n - \sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 3 - f(0),\ 0 \le f(3) \le 3.$$

Значит, $f(0) + f(3) = 3$, при этом одно из слагаемых не меньше, чем $\frac{3}{2}$, а другое не больше, чем $\frac{3}{2}$, и $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0; 3]$. Поэтому обязательно найдётся значение *x*, при котором $f(x) = \frac{3}{2}$.

Ответ варианта 152: только $a = 2$.

Ответ варианта 153: только $a = \frac{5}{2}$.

Ответ варианта 154: только $a = 3$.

7. Каков минимальный объём пирамиды, у которой в основании лежит правильный треугольник со стороной 6, а все плоские углы при вершине равны между собой и не превосходят $2\arcsin\frac{1}{3}$?

Ответ: $5\sqrt{23}$. **Решение.** Введём обозначения: a – длина ребра основания, $SA = x$, $SB = y$ и $SC = z$ – длины боковых рёбер, α – величина плоского угла при вершине *S*, *SO* – высота пирамиды, $h = AA_1$ – высота основания.

Из теоремы косинусов для боковых граней следует $\begin{cases} a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha, \\ a^2 = y^2 + z^2 - 2zy\cos\alpha, \\ a^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\alpha. \end{cases}$

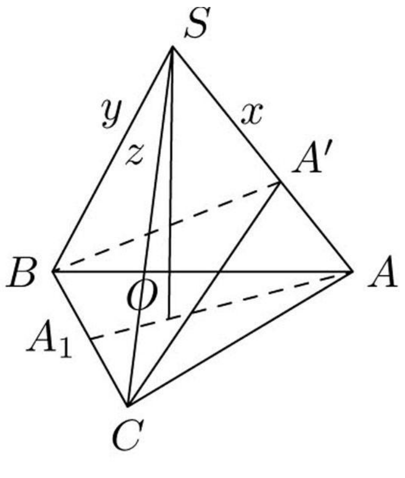
Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем, что $(x-z)(x+z) = 2(x-z)y\cos\alpha$. Следовательно, возможны два случая: 1) $x = z$; 2) $x + z = 2y\cos\alpha$ (откуда следует, что $\cos\alpha > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$). Если все величины *x*, *y* и *z* различны, то с необходимостью получаем $\begin{cases} x + y = 2z\cos\alpha, \\ y + z = 2x\cos\alpha, \\ x + z = 2y\cos\alpha, \end{cases}$ откуда следует, что $x - z = 0$, т.е. по крайней мере две из величин *x*, *y* и *z* равны.

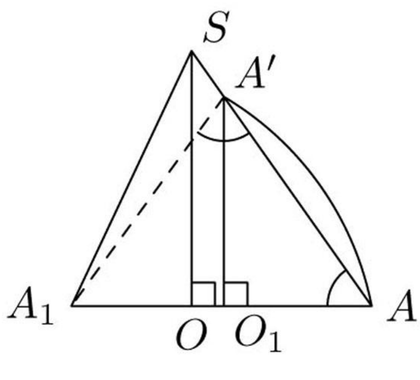
Рассмотрим два случая: 1) $x = y = z$; 2) $y = z \neq x$.

В первом случае пирамида *SABC* правильная и её объём равен $V_1 = \frac{a^3}{12} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{12}}$ ($S_{\text{осн}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $SA_1 = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, $A_1O = \frac{h}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, следовательно $SO = a\sqrt{\frac{1}{4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{12}}$). Получаем, что объём является убывающей функцией по α и у правильной пирамиды он будет минимальным при $\alpha = 2\arcsin\frac{1}{3}$. При $a = 6$ получаем, что $h = 3\sqrt{3}$, $SO = \sqrt{69}$, $S_{\text{осн}} = 9\sqrt{3}$ и $V_{SABC} = 9\sqrt{23}$.

Второй случай. Если $y = z \neq x$, то получаем пирамиду $SBCA'$, где точки A и A' лежат на одной окружности с центром в точке A_1 и радиусом, равным длине отрезка AA_1, то есть $A_1A' = A_1A = h$. Треугольник $A'BC$ – правильный и $V_{SA'BC} < V_{SABC}$. Найдём объём пирамиды $A'ABC$. Для этого достаточно найти её высоту $A'O_1$. Построим сечение пирамиды плоскостью (SA_1A). $A'O_1 = h\sin(\pi - 2\angle A_1AA') = h\sin 2\angle A_1AA' = \frac{2h\cdot\operatorname{tg}\angle A_1AA'}{1+\operatorname{tg}^2\angle A_1AA'} = \frac{12h^2\cdot SO}{4h^2 + 9SO^2} = \frac{4\sqrt{69}}{9}$, поскольку $\operatorname{tg}\angle A_1AA' = \frac{3SO}{2h}$.

Окончательно получаем, что $V_{A'ABC} = 4\sqrt{23}$ и $V_{SA'BC} = V_{SABC} - V_{A'ABC} = 5\sqrt{23}$.





Ответ варианта 152: $\frac{\sqrt{11}}{2}$.

Ответ варианта 153: $21\sqrt{39}$.

Ответ варианта 154: $32\sqrt{11}$.

8. Маша, скучая на уроке математики, проделала с некоторым 2015-значным натуральным числом следующую операцию: от десятичной записи этого числа она отбросила последнюю цифру и к умноженному на 3 получившемуся числу прибавила удвоенную отброшенную цифру. С полученным числом она опять проделала ту же операцию и так далее. После многократного применения этой операции получающиеся у Маши числа перестали меняться, и тогда она остановилась.
а) Какое число оказалось у Маши в конце?
б) Какое наименьшее число могло быть у Маши в самом начале (укажите две его последние цифры)?

Ответ: а) 17; б) 09 (число 100…0009).

Решение. а) Пусть это число *n*, оканчивающееся на цифру *y*. Тогда $n = 10x + y$ после очередной операции станет равным $3x + 2y$. Равенство $10x + y = 3x + 2y$ равносильно $7x = y$ и, так как *y* – цифра, то $y = 7$, $x = 1$. Поэтому $n = 17$.

б) Заметим, что если исходное число не равно 17, то оно обязательно уменьшается: $10x + y > 3x + 2y \Leftrightarrow 7x > y$ (что для $x \neq 0$ и $x \neq 1$ всегда верно). Из соотношения $2(10x + y) = 17x + 3x + 2y$ следует, что число $10x + y$ делится на 17 тогда и только тогда, когда $3x + 2y$ делится на 17. Поскольку стабилизация операции происходит на числе 17, то исходное число также должно делиться на 17.

Найдём наименьшее 2015-значное число, которое делится на 17. Для удобства выпишем остатки степеней 10 при делении на 17 (см. таблицу):

Степень	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Остаток	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12	1	10

Так как через каждые 17 степеней остатки повторяются, а $10^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ (эта запись означает, что 10^{16} и 1 дают одинаковые остатки при делении на 17), и $2014 = 16 \cdot 125 + 14$, то $10^{2014} \equiv 10^{14} \equiv 8 \pmod{17}$, то $10^{2014} + 9$ делится на 17 нацело. Это и будет наименьшее 2015-значное число, делящееся нацело на 17. Оно оканчивается на 09.

Ответ варианта 152: а) 17; б) 99 (число 999…9999).

Ответ варианта 153: а) 17; б) 05 (число 100…0005)..

Ответ варианта 154: а) 17; б) 88 (число 999…9988)..