Олимпиада «Ломоносов» по математике
Условия, ответы и краткие решения заданий отборочного этапа
(11 класс, 2010/2011 учебный год)

1. Два куска сыра имеют форму прямоугольного параллелепипеда каждый. Длина первого куска на 50% больше длины второго куска, а ширина и высота первого куска соответственно на 20% и 30% меньше ширины и высоты второго куска. У какого куска сыра объём больше и насколько?

Ответ: у второго на $19\frac{1}{21}\%$ больше (у первого меньше на 16%).

Решение. Пусть a, b и c — длина, ширина и высота соответственно второго куска сыра. Тогда его объём равен $V_2 = abc$. По условию, объём первого куска сыра равен $V_1 = \frac{3}{2}a \cdot \frac{4}{5}b \cdot \frac{7}{10}c = \frac{84}{100}V_2$. Следовательно, $V_2 = \frac{25}{21}V_1 = 1\frac{4}{21}V_1$, а $\frac{4}{21} = 19\frac{1}{21}\%$.

2. Решить неравенство $\sqrt{x^2-1} \leqslant \sqrt{5x^2-1-4x-x^3}$.

Ответ: $(-\infty; -1] \cup \{2\}$.

Решение. $\sqrt{x^2-1} \leqslant \sqrt{5x^2-1-4x-x^3} \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2-1 \leqslant 5x^2-1-4x-x^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty), \\ x(x-2)^2 \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup \{2\}.$$

3. Найдите все двузначные числа вида $\overline{XY}$, если число, имеющее шестизначную десятичную запись $\overline{64X72Y}$, кратно 72.

Ответ: 80, 98.

Решение. Поскольку $\overline{64X72Y}$ кратно 8, то $Y \in \{0, 8\}$, а так как $\overline{64X72Y}$ делится нацело на 9, то $6+4+X+7+2+Y = 19+X+Y$ кратно 9. Если $Y = 0$, то $X = 8$, а если $Y = 8$, то либо $X = 0$ (не может быть первой цифрой числа), либо $X = 9$. Значит, искомыми двузначными числами являются $\overline{XY} = 80$ и $\overline{XY} = 98$.

4. Пройдя 2/5 длины узкого моста, пешеход заметил, что сзади к мосту приближается машина. Тогда он пошёл назад и встретился с машиной у начала моста. Если бы пешеход продолжал идти вперед, то машина догнала бы его у конца моста. Найти отношение скорости машины к скорости пешехода.

Ответ: 5.

Решение. За время t, которое пешеход двигался навстречу машине до встречи у начала моста, он прошёл 2/5 длины моста. Следовательно, если бы пешеход продолжал идти вперёд, то за время t он прошёл бы ещё 2/5 длины моста и ему осталось бы пройти 1/5 длины моста, а согласно условию, машина за время t подъехала бы к началу моста и до встречи с пешеходом ей осталось бы проехать мост целиком. Значит, отношение скорости машины к скорости пешехода равно 5.

5. Найти все решения уравнения $|\sin 2x - \cos x| = \big||\sin 2x| - |\cos x|\big|$ на промежутке $(-2\pi; 2\pi]$.

Ответ: $(-2\pi; -\pi] \cup [0; \pi] \cup \{-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\}$.

Решение.

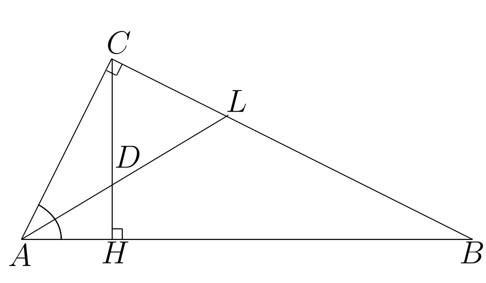
$$|\sin 2x - \cos x| = \big||\sin 2x| - |\cos x|\big| \Leftrightarrow (\sin 2x - \cos x)^2 = (|\sin 2x| - |\cos x|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x \cos x = |\sin 2x| \cdot |\cos x| \Leftrightarrow \sin 2x \cos x \geqslant 0 \Leftrightarrow \sin x \cos^2 x \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x \geqslant 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

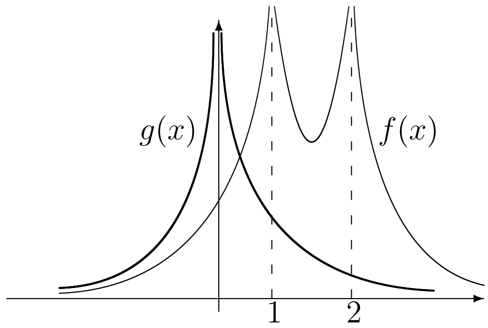
$$\Leftrightarrow x \in (-2\pi; -\pi] \cup [0; \pi] \cup \{-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\}.$$

6. Высота прямоугольного треугольника, опущенная на его гипотенузу, делит биссектрису острого угла в отношении 5 : 2, считая от вершины. Найти величину этого угла.

Ответ: $\arccos\frac{5}{7}$.



Решение. Пусть $AD = 5x$, $DL = 2x$. Тогда $\cos\angle LAH = \frac{AH}{AD} = \frac{AH}{5x} = \cos\angle LAC = \frac{AC}{AL} = \frac{AC}{7x}$. Следовательно, $\cos\angle CAH = \frac{AH}{AC} = \frac{5}{7}$.



7. Сколько решений имеет уравнение

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{2}{x^2}?$$

Ответ: 1.
Решение. Введём в рассмотрение функции $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-2)^2}$ и $g(x) = \frac{2}{x^2}$.

При $x < 0$ выполнены неравенства $x - 2 < x - 1 < x < 0$, следовательно, $\frac{1}{(x-1)^2} < \frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{(x-2)^2} < \frac{1}{x^2}$, поэтому $f(x) < g(x)$, а значит, при $x < 0$ уравнение не имеет решений.

На промежутке $(0; 1)$ функция f возрастает от $\frac{5}{4}$ (не включая) до $+\infty$, так как

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^3} + \frac{-2}{(x-2)^3} > 0 \quad \text{при} \quad x \in (0; 1),$$

а функция g убывает от $+\infty$ до 2 (не включая), так как $g'(x) = \dfrac{-4}{x^3} < 0$ при $x \in (0; 1)$. Следовательно, на этом промежутке уравнение имеет ровно 1 решение.

На промежутке $(1; 2)$ имеем $f(x) \geqslant f(\frac{3}{2}) = 8$, а $g(x) < g(1) = 2$, следовательно, на этом промежутке уравнение не имеет решений.

При $x > 2$ выполнены неравенства $0 < x - 2 < x - 1 < x$, следовательно, $\frac{1}{(x-1)^2} > \frac{1}{x^2}$ и $\frac{1}{(x-2)^2} > \frac{1}{x^2}$, поэтому $f(x) > g(x)$, значит, при $x > 2$ уравнение не имеет решений.

Второй вариант решения.

Исходное уравнение при условиях $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq 2$ равносильно уравнению $6x^3 - 21x^2 + 24x - 8 = 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = 6x^3 - 21x^2 + 24x - 8$. Поскольку $f'(x) = 18x^2 - 42x + 24$, то $x = 1$ — точка максимума, а $x = \frac{4}{3}$ — точка минимума. На области $(-\infty, 1) \cup (\frac{4}{3}; +\infty)$ функция f возрастает, на промежутке $(1; \frac{4}{3})$ убывает. Так как $f(0) = -8$, $f(1) = 1$, $f(\frac{4}{3}) = \frac{8}{9}$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет единственный корень, который лежит на промежутке $(0; 1)$.

8. Даны три точки, расстояния между которыми равны 4, 6 и 7. Сколько существует попарно не равных друг другу треугольников, для которых каждая из этих точек — либо вершина, либо середина стороны?
Ответ: 11.
Решение. Перечислим все построения треугольников, удовлетворяющих условию задачи, с указанием длин сторон.

	Описание треугольника		Длины сторон
№1	Все точки — вершины		4, 6, 7
	Одна точка — вершина, две — середины сторон		
№2		Вершина при продолжении сторон длины 4 и 6 обеих	8, 12, 14
№3		продолжение стороны длины 4	8, 14, $2\sqrt{94}$
№4		продолжение стороны длины 6	12, 14, $2\sqrt{154}$
№5		Вершина при продолжении сторон длины 4 и 7 обеих	8, 12, 14
№6		продолжение стороны длины 4	8, 12, $2\sqrt{55}$
№7		продолжение стороны длины 7	12, 14, $2\sqrt{154}$

№8		Вершина при продолжении сторон длины 6 и 7 обеих	8, 12, 14
№9		продолжение стороны длины 6	8, 12, $2\sqrt{55}$
№10		продолжение стороны длины 7	8, 14, $2\sqrt{94}$
	Две точки — вершины, одна — середина стороны		
№11		вершины при стороне длины 4 продолжается сторона длины 7	4, 14, $\sqrt{154}$
№12		продолжается сторона длины 6	4, 12, $\sqrt{154}$
№13		вершины при стороне длины 6 продолжается сторона длины 4	6, 8, $\sqrt{94}$
№14		продолжается сторона длины 7	6, 14, $\sqrt{94}$
№15		вершины при стороне длины 7 продолжается сторона длины 4	7, 8, $\sqrt{55}$
№16		продолжается сторона длины 6	7, 12, $\sqrt{55}$
№17	Все точки — середины сторон		8,12,14

Итак, существуют 17 способов построения, приводящих к 11 различным треугольникам.

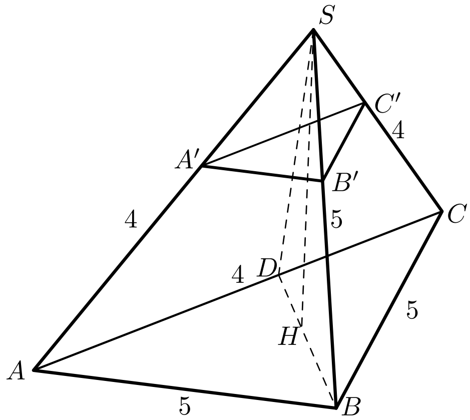
9. В какую степень надо возвести корень x_0 уравнения $x^{11}+x^7+x^3=1$, чтобы получить число $x_0^4+x_0^3-1$?

Ответ: 15.

Решение. Если $x_0=1$, то и $x_0^4+x_0^3-1=1$, следовательно, в этом случае степень может быть любой. Но число $x_0=1$ не удовлетворяет уравнению $x^{11}+x^7+x^3=1$, поэтому $x_0\neq 1$.

Поскольку $1=x_0^{11}+x_0^7+x_0^3$, получаем

$$x_0^4+x_0^3-1=x_0^4+x_0^3-x_0^{11}-x_0^7-x_0^3=x_0^4(1-x_0^7-x_0^3)=x_0^4(x_0^{11}+x_0^7+x_0^3-x_0^7-x_0^3)=x_0^{15}.$$



10. Сфера касается всех рёбер пирамиды $SABC$, причем боковых рёбер SA, SB и SC — в точках A', B' и C'. Найти объем пирамиды $SA'B'C'$, если $AB=BC=SB=5$ и $AC=4$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{59}}{15}$.

Решение. Так как сфера касается всех рёбер, то пирамида обладает тем свойством, что

$$BC+AS=AB+SC=AC+SB=9,$$

откуда $AS=SC=4$, следовательно $\triangle ASC$ равносторонний. Тогда $\triangle A'SC'$ тоже равносторонний, поэтому $SA'=SC'=A'C'=2$. Проведём SH — высоту пирамиды $SABC$ и $SD\perp AC$ (тогда $BD\perp AC$ по теореме о трёх перпендикулярах). Из $\triangle ABC$ находим $BD=\sqrt{21}$, откуда $S_{ABC}=2\sqrt{21}$. Из $\triangle SAC$ находим $SD=2\sqrt{3}$. Далее, из $\triangle SDB$ находим

$$\cos\angle SBD=\frac{SB^2+BD^2-SD^2}{2SB\cdot BD}=\frac{21+25-12}{10\sqrt{21}}=\frac{17}{5\sqrt{21}}.$$

Следовательно, $\sin\angle SBD=\sqrt{1-\dfrac{289}{525}}=\dfrac{2\sqrt{59}}{5\sqrt{21}}$ и $SH=SB\cdot\sin\angle SBD=\dfrac{2\sqrt{59}}{\sqrt{21}}$.

Найдём объём пирамиды $SABC$: $V_{SABC}=\dfrac{1}{3}\cdot SH\cdot S_{ABC}=\dfrac{4\sqrt{59}}{3}$.

Поскольку $\dfrac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=\dfrac{SA'\cdot SB'\cdot SC'}{SA\cdot SB\cdot SC}$, окончательно получаем

$$V_{SA'B'C'}=\frac{1}{10}V_{SABC}=\frac{2\sqrt{59}}{15}.$$