Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Условия, ответы и краткие решения заданий заключительного этапа (10—11 классы, 2010/2011 учебный год)

Вариант 1

1. Два поезда, содержавшие по 15 одинаковых вагонов каждый, двигались навстречу друг другу с постоянными скоростями. Ровно через 28 с после встречи их первых вагонов пассажир Саша, сидя в купе третьего вагона, поравнялся с пассажиром встречного поезда Валерой, а еще через 32 с последние вагоны этих поездов полностью разъехались. В каком по счету вагоне ехал Валера?

Ответ: 12.

Решение. Так как с момента разъезда «нулевых» вагонов (он же — момент встречи первых вагонов) до момента разъезда 15-х вагонов прошло 60 с, то через каждые $60 : 15 = 4$ с разъезжались очередные вагоны. Поэтому через 28 с только что разъехались 7-е вагоны поездов, т. е. 7-й вагон одного поезда поравнялся с 8-м вагоном другого. В этот момент 3-й, Сашин, вагон поравнялся с Валериным вагоном, имеющим номер $8 + (7 - 3) = 12$.

2. Найдите площадь фигуры, заданной на координатной плоскости системой

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + 2x \geqslant 0 \\ -1 - x^2 \leqslant y \leqslant 2 + \sqrt{x}. \end{cases}$$

Ответ: 4.

Решение. Система определена при условии $x \in [0, 1]$, при котором первое неравенство системы выполнено. Так как функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ при $x \in [0, 1]$ взаимно обратны, то площадь фигуры, определяемая условиями $x \in [0, 1]$, $-1 - x^2 \leqslant y \leqslant 2 + \sqrt{x}$, составлена из тех же частей, что и площадь прямоугольника, заданного условиями $x \in [0, 1]$, $y \in [-2, 2]$, т. е. равна 4.

3. Из шара какого наименьшего радиуса можно вырезать правильную четырехугольную пирамиду с ребром основания 14 и апофемой 12?

Ответ: $7\sqrt{2}$.

Решение. С одной стороны, диаметр шара не может быть меньше диагонали $14\sqrt{2}$ основания (квадрата со стороной 14) содержащейся в нем пирамиды, поэтому радиус искомого шара не меньше $7\sqrt{2}$. С другой стороны, шар радиусом $7\sqrt{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей основания пирамиды содержит ее вершину, а с ней и всю эту пирамиду, так как ее высота равна

$$h = \sqrt{144 - 49} = \sqrt{95} < 7\sqrt{2} \quad (\Leftrightarrow 95 < 98).$$

4. Решите неравенство

$$\log_5(5x^2 + 2x) \cdot \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) > \log_5 5x^2.$$

Ответ: $(\frac{-1-\sqrt{2}}{5}; -\frac{2}{5}) \cup (\frac{-1+\sqrt{2}}{5}; \infty)$.

Решение.

$$\log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) \cdot \log_5(5x^2 + 2x) > \log_5 5x^2 \Leftrightarrow \log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right)\left(\log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) + \log_5 x^2\right) > 1 + \log_5 x^2 \Leftrightarrow$$

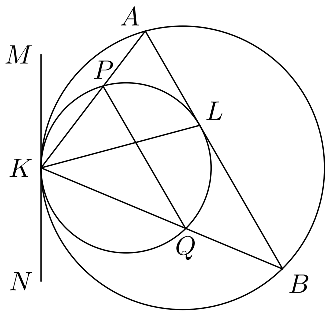
$$\Leftrightarrow \left(\log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) - 1\right)\left(\log_5\left(5 + \frac{2}{x}\right) + \log_5 x^2 + 1\right) > 0,$$

а поскольку $5 + \frac{2}{x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{2}{5}) \cup (0; \infty)$, имеем два случая:

1) $x < -\frac{2}{5}$ $\left(\Rightarrow \log_5\left(5+\frac{2}{x}\right) < 1\right)$: $\log_5(5x^2+2x) < -1 \Leftrightarrow 25x^2+10x-1<0 \Leftrightarrow x \in (x_-; -\frac{2}{5})$, где $x_\pm = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{5}$, причем $x_- < -\frac{2}{5} < x_+$;

2) $x > 0$ $\left(\Rightarrow \log_5\left(5+\frac{2}{x}\right) > 1\right)$: $\log_5(5x^2+2x) > -1 \Leftrightarrow 25x^2+10x-1>0 \Leftrightarrow x \in (x_+; \infty)$.

5. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке K. Хорда AB большей окружности касается меньшей окружности в точке L, причем $AL = 10$. Найдите BL, если $AK : BK = 2 : 5$.



Ответ: $BL = 25$.

Решение. Проведем хорду PQ и общую касательную MN (см. рис.), тогда

$$\angle PQK = \frac{1}{2}\smile PK = \angle PKM = \frac{1}{2}\smile AK = \angle ABK,$$

поэтому $PQ \parallel AB$ и $\smile PL = \smile QL$. Следовательно, $\angle PKL = \angle QKL$, т.е. KL — биссектриса треугольника AKB, откуда получаем

$$\frac{AL}{BL} = \frac{AK}{BK} = \frac{2}{5} \implies BL = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25.$$

6. При каких значениях a, b и c множество действительных корней уравнения

$$x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx = c$$

состоит в точности из чисел -1 и 1?

Ответ: $a = -6$, $b = -1$, $c = -4$.

Решение. Так как $x = 1$, $x = -1$ — корни уравнения $x^5 + 2x^4 + ax^2 + bx - c = 0$, то числа a, b, c удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 3+a+b-c=0, \\ 1+a-b-c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-1, \\ c=a+2 \end{cases} \Rightarrow x^5+2x^4+ax^2+bx-c = (x^2-1)(x^3+2x^2+x+2+a).$$

Многочлен $x^3+2x^2+x+2+a$ имеет хотя бы один действительный корень (равный ±1):

1) если $x = 1$ — корень, то $a = -6$ и $x^3+2x^2+x+2+a = x^3+2x^2+x-4 = (x-1)(x^2+3x+4)$, а так как квадратный трёхчлен x^2+3x+4 действительных корней не имеет, то значение $a = -6$ удовлетворяет условиям задачи;

2) если $x = -1$ — корень, то $a = -2$ и $x^3+2x^2+x+2+a = x^3+2x^2+x$, однако многочлен x^3+2x^2+x имеет еще и корень $x = 0$, поэтому требование задачи не выполнено.

7. Какое наименьшее (одинаковое) число карандашей нужно положить в каждую из 6 коробок так, чтобы в любых 4 коробках нашлись карандаши любого из 26 заранее заданных цветов (карандашей имеется достаточное количество)?

Ответ: 13.

Решение. С одной стороны, карандаши каждого цвета должны встречаться по крайней мере в трёх коробках из шести, поскольку если карандаши какого-то цвета лежат не более чем в двух коробках, то в оставшихся коробках, которых — не менее четырёх, карандашей этого цвета нет. Поэтому всего карандашей должно быть не менее $3 \cdot 26$.

С другой стороны, если взять по 3 карандаша каждого из 26 цветов и разложить их так, чтобы никакие карандаши одного цвета не лежали в одной коробке, то карандаш любого цвета найдётся в любых четырёх коробках (так как остальных коробок всего две). Нужная раскладка карандашей получится, например, если все карандаши разбить на 3 группы по 26 карандашей всех цветов и каждую группу разложить поровну (по 13 карандашей) в две коробки.

8. Функция $y = f(t)$ такова, что сумма корней уравнения $f(\sin x) = 0$ на отрезке $[3\pi/2, 2\pi]$ равна 33π, а сумма корней уравнения $f(\cos x) = 0$ на отрезке $[\pi, 3\pi/2]$ равна 23π. Какова сумма корней второго уравнения на отрезке $[\pi/2, \pi]$?

Ответ: 17π.

Решение. Пусть уравнение $f(\sin x) = 0$ на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ имеет k корней $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Это значит, что уравнение $f(t) = 0$ на отрезке $[-1; 0]$ имеет k корней $t_1, \ldots, t_k$. Так как $\arcsin t_i \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, то $x_i = 2\pi + \arcsin t_i$ и

$$2\pi k + \arcsin t_1 + \ldots + \arcsin t_k = 33\pi.$$

Тогда, аналогично, уравнение $f(\cos x) = 0$ на отрезке $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ также имеет k корней, записываемых в виде $2\pi - \arccos t_i$ (так как $\arccos t_i \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$), поэтому

$$2\pi k - \arccos t_1 - \ldots - \arccos t_k = 23\pi.$$

Из двух полученных равенств следует, что

$$\arcsin t_1 + \ldots + \arcsin t_k + \arccos t_1 + \ldots + \arccos t_k = 10\pi,$$

а так как $\arcsin \alpha + \arccos \alpha = \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} k = 10\pi$, откуда $k = 20$.

Наконец, на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ уравнение $f(\cos x) = 0$ также имеет $k = 20$ корней $\arccos t_1$, ..., $\arccos t_{20}$, для которых имеем

$$\arccos t_1 + \ldots + \arccos t_{20} = 2 \cdot 20\pi - 23\pi = 17\pi.$$

Вариант 2

Ответы. 1. 11; **2.** 3; **3.** $8\sqrt{2}$; **4.** $\left(\frac{-2-\sqrt{5}}{3}; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(\frac{-2+\sqrt{5}}{3}; \infty\right)$; **5.** $AK = 8$; **6.** $a = -6$, $b = 4$, $c = 1$; **7.** 12; **8.** 43π.

Вариант 3

Ответы. 1. 15; **2.** 2; **3.** $5\sqrt{6}$; **4.** $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{14}; -\frac{1}{7}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{14}; \infty\right)$; **5.** $BL = 9$; **6.** $a = -1$, $b = 4$, $c = 6$; **7.** 11; **8.** 19π.