

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Вариант 1 - Решения

Задание 1. (20 баллов)

При откачке воды из скважины из водоносного горизонта образуется депрессионная воронка, радиус R которой определяется величиной напора воды (x , выраженная в некоторых единицах измерения) и временем, прошедшим после начала откачки (t , сек.) в соответствии со следующим соотношением

$$R = \sqrt{2x - t} + 2\sqrt{x^3 - 8}$$

При каких значениях времени t радиус воронки может составлять 1 ед.?

Решение.

ОДЗ: $x \geq \max(t/2, 2)$. Запишем уравнение задачи в виде $\sqrt{2x - t} = 1 - 2\sqrt{-8 + x^3}$. Левая часть уравнения возрастает относительно x , правая часть – убывает. Поэтому при наличии корня этого уравнения этот корень является единственным. При значении $t \leq 4$ в силу указанных свойств монотонности левой и правой частей уравнение $\sqrt{2x - t} = 1 - 2\sqrt{-8 + x^3}$ разрешимо в том и только в том случае, когда $\sqrt{4 - t} \leq 1 \Leftrightarrow t \geq 3 \Rightarrow t \in [3, 4]$. Если $t > 4$, то уравнение разрешимо в том и только в том случае, когда значение $t/2$ не превосходит корня правой части уравнения, т.е. $\frac{t}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{33}{4}} \Leftrightarrow t \leq \sqrt[3]{66}$.

Ответ: $t \in [3, \sqrt[3]{66}]$.

Задание 2. (15 баллов)

В угольную шахту каждую секунду за счет выбросов поступает масса m взрывоопасного газа – метана (молярная масса метана $M = 16$ г/моль). Во избежание взрыва шахту принудительно вентилируют. Для этого вглубь шахты при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 17$ °С каждую секунду закачивается объём $V = 150$ м³ атмосферного воздуха. Воздух, смешанный с метаном, вытесняется из шахты через её открытый вход. При этом химический состав воздуха в шахте, его давление и температура остаются постоянными. При каком значении m доля метана в количестве вещества воздуха в шахте в результате вентиляции

составляет $\alpha \approx 1,0 \%$? Ответ приведите в килограммах (кг) с точностью до десятых. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(кг·моль).

Решение.

Из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \nu RT$ следует, что каждую секунду в шахту поступает количество вещества чистого воздуха

$$\nu_1 = \frac{p_0 V}{RT}.$$

Кроме того, каждую секунду в шахту поступает количество вещества метана

$$\nu_2 = \frac{m}{M}.$$

По условию задачи в шахте постоянного объема давление и температура воздуха остаются постоянными. Значит, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева, количество вещества воздуха в шахте постоянно. Следовательно, каждую секунду из шахты уходит воздух, смешанный с метаном, в количестве $\nu_1 + \nu_2$. Доля метана в количестве вещества этого воздуха

$$\alpha = \frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = \frac{\frac{m}{M}}{\frac{p_0 V}{RT} + \frac{m}{M}} = \frac{1}{\frac{Mp_0 V}{mRT} + 1}.$$

Химический состав этого воздуха такой же, как и воздуха в шахте. Иначе химический состав воздуха в шахте изменялся бы с течением времени, что противоречит условию. Поэтому доля метана в количестве вещества воздуха в шахте такая же, как и в воздухе, выходящем из шахты:

$$\alpha = \frac{1}{\frac{Mp_0 V}{mRT} + 1}.$$

Отсюда

$$m = \frac{Mp_0 V}{RT \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}.$$

Подставим числовые значения:

$$m = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 150}{8,31 \cdot 290 \cdot \left(\frac{1}{0,01} - 1\right)} \approx 1,0 \text{ кг}.$$

Ответ: $m \approx 1,0$ кг

Задание 3. (20 баллов)

Собранные по итогам байкальской летней практики образцы огнитита были обработаны для дальнейшего изучения. Один из образцов представляет собой правильную треугольную пирамиду $SABC$, в которой отношение длины боковой стороны к длине стороны основания ABC равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Для простоты предполагается, что образец состоит из двух частей – халькоперита и висмута, граница между которыми представляет собой плоскость ASD , где точка D лежит на стороне BC основания пирамиды и при этом длина BD равна $\frac{1}{3}$ длины BC . Чему равен тангенс двугранного угла между плоскостью сечения и боковой гранью ASB ?

Решение.

Пусть $SA=b=ka$, a – длина стороны основания, $k>1$, $BD=ta$, $0<t<1$. Проведем через сторону основания BC плоскость, перпендикулярную боковому ребру SA , K – точка пересечения ее с SA . Треугольник BKC равнобедренный, стороны его $KB=KC$ найдем из равенства $CK \cdot kA = a \cdot a\sqrt{k^2 - 1/4} \Leftrightarrow CK = BK = a\sqrt{1 - \frac{1}{4k^2}}$. Далее пусть H – середина BC , тогда $KH = a\sqrt{1 - \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4}} = a\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4k^2}} = \frac{a}{2}\sqrt{3 - \frac{1}{k^2}}$.

В треугольнике BKH : $tgBKH = \frac{BH}{KH} = \frac{\sqrt{\frac{k^2}{3k^2-1}}}{\frac{a}{2}\sqrt{3 - \frac{1}{k^2}}} = \frac{k}{\sqrt{3k^2-1}}$.

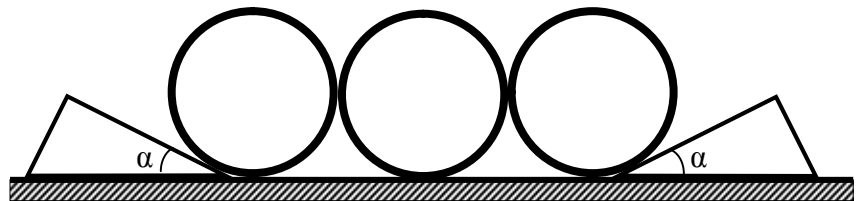
В треугольнике DKH : $tgDKH = \frac{DH}{KH} = \frac{0.5-t}{\frac{1}{2}\sqrt{3 - \frac{1}{k^2}}} = \frac{(1-2t)k}{\sqrt{3k^2-1}}$.

Искомый тангенс равен $tgBKD = tg(BKH - DKH) = \frac{tgBKH - tgDKH}{1 + tgBKH \cdot tgDKH} = \frac{2tk\sqrt{3k^2-1}}{(4-2t)k^2-1}$

Ответ: $\frac{\sqrt{55}}{19}$

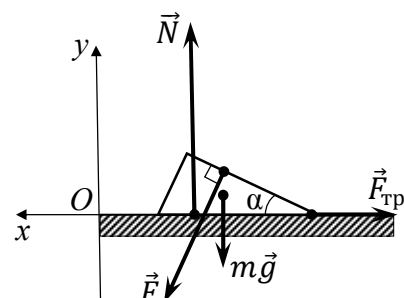
Задание 4. (15 баллов)

Трубы для нефтепровода сложены на горизонтальной площадке. Чтобы трубы не раскатывались, под них с боков подложены клинья с углом α ($tg\alpha = 0,3$) при вершине (см. рис.). При каких значениях μ – коэффициента трения клиньев по поверхности площадки – клин остаётся неподвижным, когда на него давит труба, независимо от массы клина, диаметра и массы трубы? Трением труб о наклонную поверхность клиньев пренебречь. Укажите минимальное возможное значение μ .



Решение.

На клин массой m действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила \vec{F} со стороны трубы, силы \vec{N} и $\vec{F}_{тр}$ со стороны площадки. Из условия задачи следует, что сила \vec{F} направлена перпендикулярно наклонной стороне клина. Точка её приложения, в зависимости от диаметра трубы, может оказаться на наклонной стороне клина на любом



расстоянии от вершины угла α . Тем не менее, при заданной на рисунке геометрии клина прямая линия, на которой лежит сила \vec{F} , в любом случае пересекает площадку хранения труб в пределах нижней грани клина. Поэтому сила \vec{F} не вызывает опрокидывания клина, и нужно рассмотреть только условие равновесия клина относительно поступательного движения.

Систему отсчёта, связанную с Землёй, будем считать инерциальной. Клинок покоится в этой системе отсчёта, если равнодействующая сил, приложенных к нему, равна нулю. Запишем это условие в проекциях на оси Ox и Oy :

$$\begin{aligned}F \sin \alpha - F_{\text{тр}} &= 0, \\N - mg - F \cos \alpha &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}F_{\text{тр}} &= F \sin \alpha, \\N &= F \cos \alpha + mg.\end{aligned}$$

Если клинок покоится, то $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, то есть

$$F \sin \alpha \leq \mu(F \cos \alpha + mg).$$

Соберём в левой части этого неравенства слагаемые, содержащие F :

$$F(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq \mu mg.$$

Правая часть этого неравенства положительна при любой массе клинка m . Поэтому неравенство будет справедливо при любых значениях F , если выражение в скобках будет отрицательно или равно нулю:

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \alpha \leq \mu \cos \alpha.$$

Поскольку $0 < \alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha > 0$, и неравенство можно записать в виде:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu.$$

Ответ: $\min \mu = \operatorname{tg} \alpha = 0,3$.

Задание 5. (15 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: «Где и в каких геологических условиях образуются глины?»

Глина – тонкозернистая осадочная горная порода, состоящая преимущественно из глинистых минералов-силикатов (каолинита, монтмориллонита и других), с небольшой примесью песчаных и карбонатных частиц.

Образование глин происходит в поверхностных (экзогенных) континентальных условиях и связано преимущественно с процессами химического выветривания горных пород, протекающего под воздействием воды и воздуха. Реже встречаются глины, сформированные в подводных морских условиях.

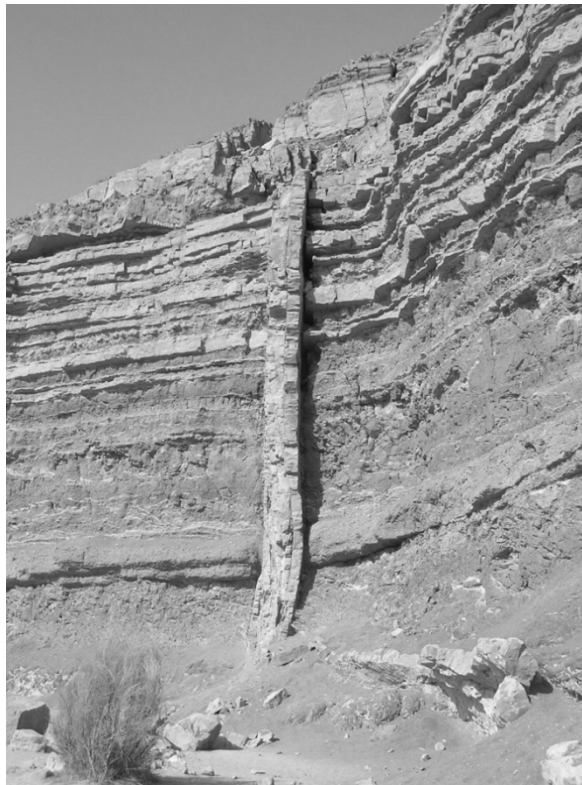
В зависимости от состава исходных пород образуются разные по составу глины.

Сформировавшиеся глинистые минералы в дальнейшем накапливаются в местах образования (образуя коры выветривания) или переносятся на значительные расстояния реками, ветром, морскими течениями и другими агентами. По местам накопления выделяют глины морские

(шельфовые, лагунные, глубоководные и др.) и континентальные (озёрные, речные, делювиальные и пролювиальные и др.). В зависимости от места накопления глины различаются составом, размерами частиц, слоистостью, пластичностью и другими признаками.

Задание 6. (15 баллов)

Что изображено на фотографии? Как это могло образоваться?



На данной фотографии изображен обрыв (обнажение) горных пород. Его основной объем сложен слоистой слабонаклонной толщей. Слои имеют разную мощность и прочность, более прочные слои нависают карнизами, менее прочные образуют ниши. Скорей всего эта толща сложена осадочными горными породами (песчаниками, известняками и др.). В центральной части фотографии наблюдается вертикальное тело, секущее слоистую толщу. Скорей всего это дайка – магматическое тело с секущими контактами, длина которого во много раз превышает ширину. В нижней части обнажения лежат рыхлые неокатанные обломки горных пород разного размера.

Образование данного геологического объекта проходило вероятней всего таким образом: 1) накопление осадков на дне моря, формирование слоистой толщи осадочных горных пород, 2) внедрение магматического расплава по трещине в осадочной толще и формирование дайки, 3) воздымание территории, выход горных пород на поверхность, 4) разрушение горных пород под действием экзогенных геологических процессов (выветривание, прорезание оврагами и реками), формирование обрыва, накопление у его подножия обломков в результате осыпей и обвалов.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (10-11 классы)

Вариант 2 - Решения

Задание 1. (20 баллов)

При откачке воды из скважины из водоносного горизонта образуется депрессионная воронка, радиус R которой определяется величиной напора воды (x , выраженная в некоторых единицах измерения) и временем, прошедшим после начала откачки (t , сек.) в соответствии со следующим соотношением

$$R = \sqrt{x - 2t} + 4\sqrt{x^3 - 27}$$

При каких значениях времени t радиус воронки может составлять 1ед.?

Решение.

ОДЗ: $x \geq \max(2t, 3)$. Запишем уравнение задачи в виде $\sqrt{x - 2t} = 1 - 4\sqrt{-27 + x^3}$. Левая часть уравнения возрастает относительно x , правая часть – убывает. Поэтому при наличии корня этого уравнения этот корень является единственным. При значении $t \leq 1.5$ в силу указанных свойств монотонности левой и правой частей уравнение разрешимо в том и только в том случае, когда $\sqrt{3 - 2t} \leq 1 \Leftrightarrow t \geq 1 \Rightarrow t \in [1, 1.5]$. Если $t > 1.5$, то уравнение разрешимо в том и только в том случае, когда $2t \leq \sqrt[3]{27 \frac{1}{4}}$.

Ответ: $t \in [1, \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{433}{16}}]$

Задание 2. (15 баллов)

В угольную шахту каждую секунду за счет выбросов поступает масса m взрывоопасного газа – метана (молярная масса метана $M = 16$ г/моль). Во избежание взрыва шахту принудительно вентилируют. Для этого вглубь шахты при нормальном атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па и температуре $t = 7$ °С каждую секунду закачивается объём $V = 200$ м³ атмосферного воздуха. Воздух, смешанный с метаном, вытесняется из шахты через её открытый вход. При этом химический состав воздуха в шахте, его давление и температура остаются постоянными. При каком значении m доля метана в количестве вещества воздуха в шахте в результате вентиляции составляет $\alpha \approx 1,0$ %? Ответ приведите в килограммах (кг) с точностью до десятых. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(кг·моль).

Решение.

Из уравнения Клапейрона – Менделеева $pV = \nu RT$ следует, что каждую секунду в шахту поступает количество вещества чистого воздуха

$$\nu_1 = \frac{p_0 V}{RT}$$

Кроме того, каждую секунду в шахту поступает количество вещества метана

$$v_2 = \frac{m}{M}.$$

По условию задачи в шахте постоянного объема давление и температура воздуха остаются постоянными. Значит, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева, количество вещества воздуха в шахте постоянно. Следовательно, каждую секунду из шахты уходит воздух, смешанный с метаном, в количестве $v_1 + v_2$. Доля метана в количестве вещества этого воздуха

$$\alpha = \frac{v_2}{v_1 + v_2} = \frac{\frac{m}{M}}{\frac{p_0 V}{RT} + \frac{m}{M}} = \frac{1}{\frac{Mp_0 V}{mRT} + 1}.$$

Химический состав этого воздуха такой же, как и воздуха в шахте. Иначе химический состав воздуха в шахте изменялся бы с течением времени, что противоречит условию. Поэтому доля метана в количестве вещества воздуха в шахте такая же, как и в воздухе, выходящем из шахты:

$$\alpha = \frac{1}{\frac{Mp_0 V}{mRT} + 1}.$$

Отсюда

$$m = \frac{Mp_0 V}{RT \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}.$$

Подставим числовые значения:

$$m = \frac{16 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5 \cdot 200}{8,31 \cdot 280 \cdot \left(\frac{1}{0,01} - 1\right)} \approx 1,4 \text{ кг.}$$

Ответ: $m \approx 1,4$ кг.

Задание 3. (20 баллов)

Собранные по итогам байкальской летней практики образцы огнитита были обработаны для дальнейшего изучения. Один из образцов представляет собой правильную треугольную пирамиду $SABC$, в которой отношение длины боковой стороны к длине стороны основания ABC равно $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Для простоты предполагается, что образец состоит из двух частей – халькоперита и висмута, граница между которыми представляет собой плоскость ASD , где точка D лежит на стороне BC основания пирамиды и при этом длина BD равна $\frac{1}{4}$ длины BC . Чему равен тангенс двугранного угла между плоскостью сечения и боковой гранью ASB ?

Решение.

Пусть $SA=b=ka$, a – длина стороны основания, $k>1$, $BD=ta, 0<t<1$. Проведем через сторону основания BC плоскость, перпендикулярную боковому ребру SA , K – точка пересечения ее с SA . Треугольник BKC равнобедренный, стороны его $KB=KC$ найдем из равенства $CK \cdot kA = a \cdot a\sqrt{k^2 - 1/4} \Leftrightarrow CK = BK = a\sqrt{1 - \frac{1}{4k^2}}$. Далее пусть H – середина

BC , тогда $KH = a\sqrt{1 - \frac{1}{4k^2} - \frac{1}{4}} = a\sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4k^2}} = \frac{a}{2}\sqrt{3 - \frac{1}{k^2}}$.

В треугольнике ВКН: $tgBKH = \frac{BH}{KH} = \frac{\sqrt{k^2}}{\sqrt{3k^2-1}} = \frac{k}{\sqrt{3k^2-1}}$.

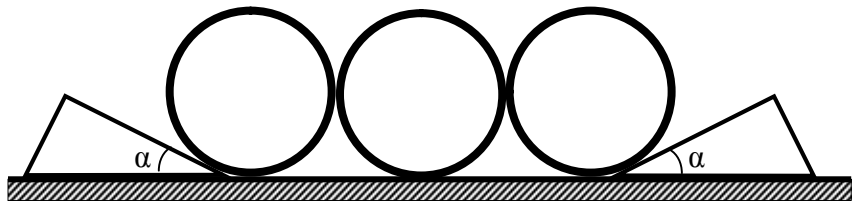
В треугольнике ДКН: $tgDKH = \frac{DH}{KH} = \frac{0.5-t}{\frac{1}{2}\sqrt{3-\frac{1}{k^2}}} = \frac{(1-2t)k}{\sqrt{3k^2-1}}$.

Искомый тангенс равен $tgBKD = tg(BKH - DKH) = \frac{tgBKH - tgDKH}{1 + tgBKH \cdot tgDKH} = \frac{2tk\sqrt{3k^2-1}}{(4-2t)k^2-1}$

Ответ: $\frac{\sqrt{55}}{27}$

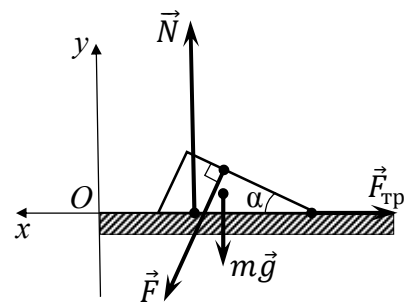
Задание 4. (15 баллов)

Трубы для нефтепровода сложены на горизонтальной площадке. Чтобы трубы не раскатывались, под них с боков подложены клинья с углом α ($tg\alpha = 0,5$) при вершине (см. рис.). При каких значениях μ – коэффициента трения клиньев по поверхности площадки – клин остаётся неподвижным, когда на него давит труба, независимо от массы клина, диаметра и массы трубы? Трением труб о наклонную поверхность клиньев пренебречь. Укажите минимальное возможное значение μ .



Решение.

На клин массой m действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила \vec{F} со стороны трубы, силы \vec{N} и $\vec{F}_{тр}$ со стороны площадки. Из условия задачи следует, что сила \vec{F} направлена перпендикулярно наклонной стороне клина. Точка её приложения, в зависимости от диаметра трубы, может оказаться на наклонной стороне клина на любом расстоянии от вершины угла α . Тем не менее, при заданной на рисунке геометрии клина прямая линия, на которой лежит сила \vec{F} , в любом случае пересекает площадку хранения труб в пределах нижней грани клина. Поэтому сила \vec{F} не вызывает опрокидывания клина, и нужно рассмотреть только условие равновесия клина относительно поступательного движения.



Систему отсчёта, связанную с Землёй, будем считать инерциальной. Клин покоится в этой системе отсчёта, если равнодействующая сил, приложенных к нему, равна нулю. Запишем это условие в проекциях на оси Ox и Oy :

$$F \sin \alpha - F_{тр} = 0 ,$$

$$N - mg - F \cos \alpha = 0 .$$

Отсюда получаем:

$$F_{тр} = F \sin \alpha ,$$

$$N = F \cos \alpha + mg .$$

Если клин покоится, то $F_{\text{тр}} \leq \mu N$, то есть

$$F \sin \alpha \leq \mu(F \cos \alpha + mg).$$

Соберём в левой части этого неравенства слагаемые, содержащие F :

$$F(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \leq \mu mg.$$

Правая часть этого неравенства положительна при любой массе клина m . Поэтому неравенство будет справедливо при любых значениях F , если выражение в скобках будет отрицательно или равно нулю:

$$\sin \alpha - \mu \cos \alpha \leq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\sin \alpha \leq \mu \cos \alpha.$$

Поскольку $0 < \alpha < 90^\circ$, то $\cos \alpha > 0$, и неравенство можно записать в виде:

$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu.$$

Ответ: $\min \mu = \operatorname{tg} \alpha = 0,5$

Задание 5. (15 баллов)

Дайте развернутый ответ на вопрос: «Где и в каких геологических условиях образуется песок?»

Песок – рыхлая осадочная горная порода, состоящая преимущественно из зёрен минерала кварца (размером до 2 мм), иногда с примесью глинистых, карбонатных и силикатных минералов.

Образование песка происходит в поверхностных (экзогенных) континентальных условиях и связано преимущественно с процессами физического выветривания горных пород – разрушение, измельчение, истирание частиц твердых горных пород. Некоторые пески образуются при измельчении пород морской абразией.

В зависимости от состава исходных пород образуются разные по составу пески.

Сформировавшиеся пески в дальнейшем накапливаются в местах образования или переносятся на значительные расстояния реками, ветром, морскими течениями и другими агентами. По местам накопления выделяют пески морские (шельфовые, лагунные и др.) и континентальные (эоловые, озёрные, речные, делювиальные и др.). В зависимости от места накопления пески различаются составом, размерами частиц, слоистостью, окатанностью зерен и другими признаками.

Задание 6. (15 баллов)

Что изображено на фотографии? Как это могло образоваться?



На данной фотографии изображен обрыв (обнажение) горных пород. Его основной объем сложен слоистой горизонтальной толщей. Слои имеют разную мощность и прочность, более прочные слои нависают карнизами, менее прочные образуют ниши. Скорей всего эта толща сложена осадочными горными породами (песчаниками, известняками и др.). В центральной части фотографии наблюдается крутопадающее тело, секущее слоистую толщу. Скорей всего это дайка – магматическое тело с секущими контактами, длина которого во много раз превышает ширину. В нижней части обнажения лежат рыхлые неокатанные обломки горных пород разного размера. Образование данного геологического объекта проходило вероятней всего таким образом: 1) накопление осадков на дне моря, формирование слоистой толщи осадочных горных пород, 2) внедрение магматического расплава по трещине в осадочной толще и формирование дайки, 3) воздымание территории, выход горных пород на поверхность, 4) разрушение горных пород под действием экзогенных геологических процессов (выветривание, прорезание оврагами и реками), формирование обрыва, накопление у его подножия обломков в результате осыпей и обвалов.

Критерии оценки решений

Критерии оценки	Баллы					
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Задание 6
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа (для заданий 1-4); в работе дан исчерпывающий ответ на поставленное геологическое задание (для заданий 5 и 6)	20	15	20	15	15	15
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен; - недостаточно полное обоснование ответов на геологические задания.	10	10	10	10	10	10
Задание выполнено с существенными недочетами: - решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях; - ответы на геологические задания даны крайне поверхностно и неполно.	5	5	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие выполненного задания в работе.	0	0	0	0	0	0

При правильном решении, но небрежном оформлении решений задания 1 или задания 3 жюри вправе снизить оценку на 5 баллов.