МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по геологии

2015/2016 учебный год

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2015-2016 учебный год

ЗАДАНИЯ <u>ОТБОРОЧНОГО</u> ЭТАПА

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2015-2016 учебный год

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Вариант 1.1

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0;0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.012 + 0.26x - ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.015. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2; a,b,c > 0$ По условию задачи из неравенства $\alpha \le x \le 0.1$ следует $g(x) \ge \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \ge \alpha, x_2 \le 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \dfrac{b}{2a} \le \alpha \Leftrightarrow a \ge \dfrac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01}]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \le \dfrac{b}{2a} \le 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases}$$

$$a \in [\frac{b}{0.2}; \min(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))], \; f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \dfrac{b}{2a} \ge 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)].$$

Подставляя значения c=0.012, b=0.26, α=0.0125, β=0.015 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.3]$.

Ответ: 2.3.

Вариант 1.2

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0;0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.013 + 0.25x - ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.014, доля бария оказывается не менее 0.016. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2; a, b, c > 0$ По условию задачи из неравенства $\alpha \le x \le 0.1$ следует $g(x) \ge \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \ge \alpha, x_2 \le 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

$$1. \begin{cases} \dfrac{b}{2a} \le \alpha \Leftrightarrow a \ge \dfrac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01}]$$

$$2. \begin{cases} \alpha \le \dfrac{b}{2a} \le 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases}$$

$$a \in [\frac{b}{0.2}; \min(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))], f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

$$3. \begin{cases} \dfrac{b}{2a} \ge 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)].$$

Подставляя значения c=0.013, b=0.25, α=0.014, β=0.016 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.2]$.

Ответ: 2.2.

Вариант 1.3

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0;0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.013 + 0.27x - ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0126, доля бария оказывается не менее 0.016. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2; a, b, c > 0$ По условию задачи из неравенства $\alpha \le x \le 0.1$ следует $g(x) \ge \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \ge \alpha, x_2 \le 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x)=\beta \Leftrightarrow ax^2-bx+\beta-c=0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

1. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a}\le\alpha \Leftrightarrow a\ge\dfrac{b}{2\alpha}, \\ a\cdot 0.1^2-b\cdot 0.1+(\beta-c)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[\dfrac{b}{2\alpha},\dfrac{0.1\cdot b-(\beta-c)}{0.01}]$

2. $\begin{cases} \alpha\le\dfrac{b}{2a}\le 0.1, \\ a\cdot 0.1^2-b\cdot 0.1+(\beta-c)\le 0, \Leftrightarrow \\ a\cdot\alpha^2-b\cdot\alpha+(\beta-c)\le 0 \end{cases}$

$a\in[\dfrac{b}{0.2};\min(\dfrac{b}{2\alpha},f(\alpha),f(0.1))],\ f(\alpha)=\dfrac{\alpha\cdot b-(\beta-c)}{\alpha^2}.$

3. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a}\ge 0.1, \\ a\cdot\alpha^2-b\cdot\alpha+(\beta-c)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(0,\min(\dfrac{b}{0.2},f(\alpha)]$.

Подставляя значения c=0.013, b=0.27, α=0.0126, β=0.016 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a\in(0,2.4]$.

Ответ: 2.4.

Вариант 1.4

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x\in[0;0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x)=0.014+0.27x-ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.016. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x)=c+bx-ax^2; a,b,c>0$ По условию задачи из неравенства $\alpha\le x\le 0.1$ следует $g(x)\ge\beta$, что означает $[\alpha,0.1]\subseteq[x_1,x_2]\Leftrightarrow x_1\ge\alpha, x_2\le 0.1$. Здесь x_1,x_2- корни уравнения $g(x)=\beta \Leftrightarrow ax^2-bx+\beta-c=0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

1. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a}\le\alpha \Leftrightarrow a\ge\dfrac{b}{2\alpha}, \\ a\cdot 0.1^2-b\cdot 0.1+(\beta-c)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[\dfrac{b}{2\alpha},\dfrac{0.1\cdot b-(\beta-c)}{0.01}]$

2. $\begin{cases} \alpha \le \dfrac{b}{2a} \le 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases}$

$a \in [\dfrac{b}{0.2}; \min(\dfrac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))],\ f(\alpha) = \dfrac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$

3. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \ge 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\dfrac{b}{0.2}, f(\alpha)].$

Подставляя значения c=0.014, b=0.27, α=0.0125, β=0.016 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.5]$.

Ответ: 2.5.

Вариант 1.5

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.015 + 0.28x - ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0126, доля бария оказывается не менее 0.017. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2; a, b, c > 0$ По условию задачи из неравенства $\alpha \le x \le 0.1$ следует $g(x) \ge \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \ge \alpha, x_2 \le 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

1. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \le \alpha \Leftrightarrow a \ge \dfrac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\dfrac{b}{2\alpha}, \dfrac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01}]$

2. $\begin{cases} \alpha \le \dfrac{b}{2a} \le 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases}$

$a \in [\dfrac{b}{0.2}; \min(\dfrac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))],\ f(\alpha) = \dfrac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$

3. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \ge 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\dfrac{b}{0.2}, f(\alpha)].$

Подставляя значения c=0.015, b=0.28, α=0.0126, β=0.017 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.6]$.

Ответ: 2.6.

Вариант 1.6

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.016 + 0.29x - ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.018. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2; a, b, c > 0$ По условию задачи из неравенства $\alpha \le x \le 0.1$ следует $g(x) \ge \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \ge \alpha, x_2 \le 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

1. $$\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \le \alpha \Leftrightarrow a \ge \dfrac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01}]$$

2. $$\begin{cases} \alpha \le \dfrac{b}{2a} \le 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases}$$

$$a \in [\frac{b}{0.2}; \min(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))], \ f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \ge 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)].$$

Подставляя значения c=0.016, b=0.29, α=0.0125, β=0.018 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.7]$.

Ответ: 2.7.

Вариант 1.7

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как

$g(x) = 0.017 + 0.3x - ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.019. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2; a,b,c > 0$ По условию задачи из неравенства $\alpha \le x \le 0.1$ следует $g(x) \ge \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \ge \alpha, x_2 \le 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

1. $$\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \le \alpha \Leftrightarrow a \ge \dfrac{b}{2\alpha}, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\frac{b}{2\alpha}, \frac{0.1 \cdot b - (\beta - c)}{0.01}]$$

2. $$\begin{cases} \alpha \le \dfrac{b}{2a} \le 0.1, \\ a \cdot 0.1^2 - b \cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0, \Leftrightarrow \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases}$$

$$a \in [\frac{b}{0.2}; \min(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))],\ f(\alpha) = \frac{\alpha \cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

3. $$\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \ge 0.1, \\ a \cdot \alpha^2 - b \cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\frac{b}{0.2}, f(\alpha)].$$

Подставляя значения c=0.017, b=0.3, α=0.0125, β=0.019 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.8]$.

Ответ: 2.8.

Вариант 1.8

При исследовании пласта известняка была выявлена закономерность в распределении некоторых элементов. Так, зависимость доли бария $g(x)$ от доли циркония x (при $x \in [0; 0.1]$) в исследуемых образцах, взятых из пласта, может быть выражена как $g(x) = 0.018 + 0.31x - ax^2$, a>0. При этом во всех образцах, где доля циркония не менее 0.0125, доля бария оказывается не менее 0.02. Чему равно максимально возможное при данных условиях значение коэффициента a? Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Рассмотрим решение в общем случае: доля бария $g(x) = c + bx - ax^2; a,b,c > 0$ По условию задачи из неравенства $\alpha \le x \le 0.1$ следует $g(x) \ge \beta$, что означает $[\alpha, 0.1] \subseteq [x_1, x_2] \Leftrightarrow x_1 \ge \alpha, x_2 \le 0.1$. Здесь x_1, x_2 - корни уравнения $g(x) = \beta \Leftrightarrow ax^2 - bx + \beta - c = 0$. Последнее условие рассмотрим в трех случаях.

1. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \le \alpha \Leftrightarrow a \ge \dfrac{b}{2\alpha}, \\ a\cdot 0.1^2 - b\cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\dfrac{b}{2\alpha}, \dfrac{0.1\cdot b - (\beta - c)}{0.01}]$

2. $\begin{cases} \alpha \le \dfrac{b}{2a} \le 0.1, \\ a\cdot 0.1^2 - b\cdot 0.1 + (\beta - c) \le 0, \Leftrightarrow \\ a\cdot \alpha^2 - b\cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases}$

$$a \in [\frac{b}{0.2}; \min(\frac{b}{2\alpha}, f(\alpha), f(0.1))],\ f(\alpha) = \frac{\alpha\cdot b - (\beta - c)}{\alpha^2}.$$

3. $\begin{cases} \dfrac{b}{2a} \ge 0.1, \\ a\cdot \alpha^2 - b\cdot \alpha + (\beta - c) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (0, \min(\dfrac{b}{0.2}, f(\alpha)]$.

Подставляя значения c=0.018, b=0.31, α=0.0125, β=0.02 и объединяя промежутки для a из трех рассмотренных случаев, получаем $a \in (0, 2.9]$.

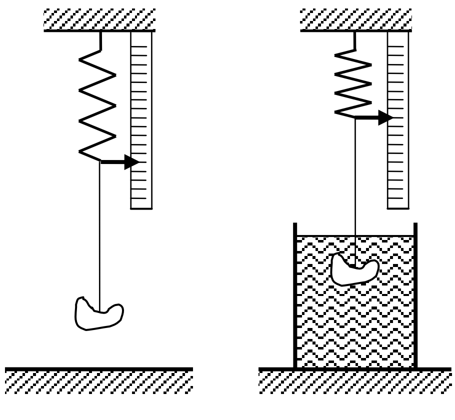
Ответ: 2.9.

Задание 2

Вариант 2.1

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 9,000 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_м$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_м$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{ол}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{Архимеда} = mg - \rho_в gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_в \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_м m_м + N_{ол} m_{ол}}{V}$$

где $m_м$, $m_{ол}$ – массы атомов меди и олова, а $N_м$, $N_{ол}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{ол} = \alpha N, \quad N_м = (1-\alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1-\alpha)N m_м + \alpha N m_{ол}}{V}. \qquad (2)$$

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_м = \frac{N m_м}{V}. \qquad (3)$$

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{ол}}{m_м}\right)\rho_м.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{ол}}{m_м} = \frac{M_{ол}}{M_м}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{ол}}{M_м}\right)\rho_м. \qquad (4)$$

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_в \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{ол}}{M_м}\right)\rho_м,$$

откуда

$$\alpha = \frac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\dfrac{M_{ол}}{M_м} - 1}.$$

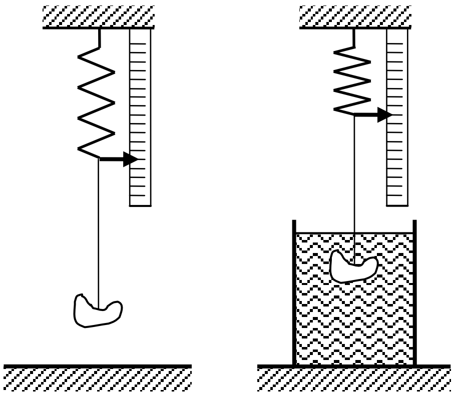
Числовой ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{10{,}000}{10{,}000 - 9{,}000} \cdot \dfrac{1000}{8960} - 1}{\dfrac{119}{64} - 1} \approx 0{,}135.$

Ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\dfrac{M_{ол}}{M_м} - 1} \approx 13{,}5\,\%$

Вариант 2.2

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 8,965 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_м$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_м$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{ол}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{Архимеда} = mg - \rho_в gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_в \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_м m_м + N_{ол} m_{ол}}{V}$$

где $m_м$, $m_{ол}$ – массы атомов меди и олова, а $N_м$, $N_{ол}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{ол} = \alpha N, \quad N_м = (1 - \alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1 - \alpha)N m_м + \alpha N m_{ол}}{V}. \qquad (2)$$

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при α = 0, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_\text{м} = \frac{Nm_\text{м}}{V}.$$
(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha\frac{m_\text{ол}}{m_\text{м}}\right)\rho_\text{м}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_\text{ол}}{m_\text{м}} = \frac{M_\text{ол}}{M_\text{м}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha\frac{M_\text{ол}}{M_\text{м}}\right)\rho_\text{м}.$$
(4)

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_\text{в}\cdot\frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha\frac{M_\text{ол}}{M_\text{м}}\right)\rho_\text{м},$$

откуда

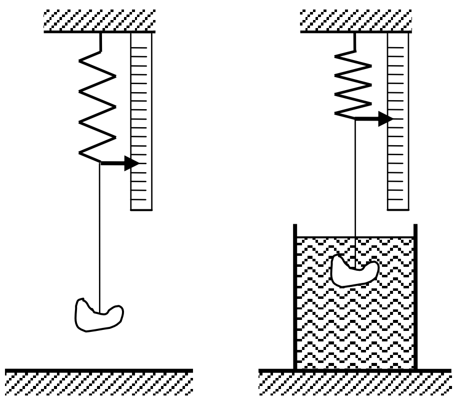
$$\alpha = \frac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2}\cdot\dfrac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{м}} - 1}{\dfrac{M_\text{ол}}{M_\text{м}} - 1}.$$

Числовой ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{10{,}000}{10{,}000 - 8{,}965}\cdot\dfrac{1000}{8960} - 1}{\dfrac{119}{64} - 1} \approx 0{,}091.$

Ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2}\cdot\dfrac{\rho_\text{в}}{\rho_\text{м}} - 1}{\dfrac{M_\text{ол}}{M_\text{м}} - 1} \approx 9{,}1\%$

Вариант 2.3

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.



При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 8,980 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_\text{м}$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_\text{в}$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_\text{м}$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{\text{ол}}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.

Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_{\text{в}} gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{в}} g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}.$$

(1)

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_{\text{м}} m_{\text{м}} + N_{\text{ол}} m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N, \quad N_{\text{м}} = (1-\alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1-\alpha)N m_{\text{м}} + \alpha N m_{\text{ол}}}{V}.$$

(2)

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при α = 0, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_{\text{м}} = \frac{N m_{\text{м}}}{V}.$$

(3)

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}}.$$

(4)

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\dfrac{M_{ол}}{M_м} - 1}.$$

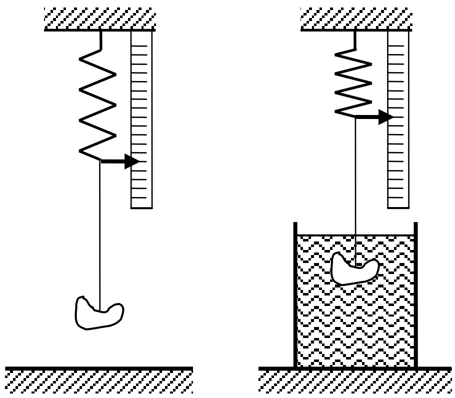
Числовой ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{10{,}000}{10{,}000 - 8{,}980} \cdot \dfrac{1000}{8960} - 1}{\dfrac{119}{64} - 1} \approx 0{,}110.$

Ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\dfrac{M_{ол}}{M_м} - 1} \approx 11{,}0\,\%$

Вариант 2.4

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 8,990 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_м$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_м$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{ол}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{Архимеда} = mg - \rho_в g V,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_в \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_м m_м + N_{ол} m_{ол}}{V}$$

где $m_м$, $m_{ол}$ – массы атомов меди и олова, а $N_м$, $N_{ол}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{ол} = \alpha N, \quad N_м = (1-\alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1-\alpha)Nm_м + \alpha N m_{ол}}{V}. \qquad (2)$$

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_м = \frac{Nm_м}{V}. \qquad (3)$$

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha\frac{m_{ол}}{m_м}\right)\rho_м.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{ол}}{m_м} = \frac{M_{ол}}{M_м}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha\frac{M_{ол}}{M_м}\right)\rho_м. \qquad (4)$$

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_в \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha\frac{M_{ол}}{M_м}\right)\rho_м,$$

откуда

$$\alpha = \frac{\frac{P_1}{P_1 - P_2}\cdot\frac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\frac{M_{ол}}{M_м} - 1}.$$

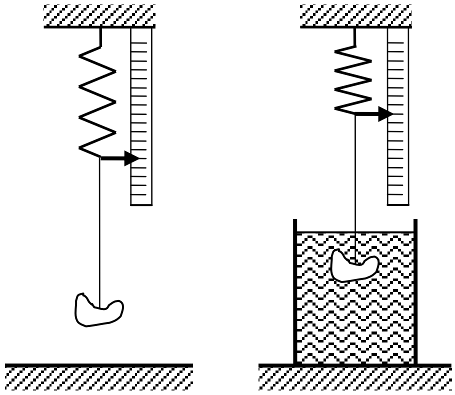
Числовой ответ: $\alpha = \dfrac{\frac{10{,}000}{10{,}000 - 8{,}965}\cdot\frac{1000}{8960} - 1}{\frac{119}{64} - 1} \approx 0{,}122.$

Ответ: $\alpha = \dfrac{\frac{P_1}{P_1 - P_2}\cdot\frac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\frac{M_{ол}}{M_м} - 1} \approx 12{,}2\,\%$

Вариант 2.5

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 9,025 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_м$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_м$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{ол}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_в g V,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_в \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_м m_м + N_{ол} m_{ол}}{V}$$

где $m_м$, $m_{ол}$ – массы атомов меди и олова, а $N_м$, $N_{ол}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{ол} = \alpha N, \quad N_м = (1-\alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1-\alpha)N m_м + \alpha N m_{ол}}{V}. \qquad (2)$$

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при α = 0, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_м = \frac{N m_м}{V}. \qquad (3)$$

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{ол}}{m_м}\right)\rho_м.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{ол}}{m_м} = \frac{M_{ол}}{M_м}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}}. \qquad (4)$$

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\dfrac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1}.$$

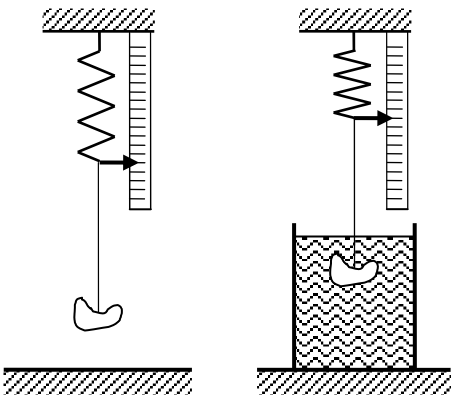
Числовой ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{10{,}000}{10{,}000 - 9{,}025} \cdot \dfrac{1000}{8960} - 1}{\dfrac{119}{64} - 1} \approx 0{,}168.$

Ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\dfrac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1} \approx 16{,}8\,\%$

Вариант 2.6

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 9,040 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_{\text{м}}$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_{\text{в}}$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_{\text{м}}$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{\text{ол}}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_{\text{в}} g V,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{в}} g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_{\text{м}} m_{\text{м}} + N_{\text{ол}} m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N, \quad N_{\text{м}} = (1-\alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1-\alpha)N m_{\text{м}} + \alpha N m_{\text{ол}}}{V}. \qquad (2)$$

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_{\text{м}} = \frac{N m_{\text{м}}}{V}. \qquad (3)$$

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}}. \qquad (4)$$

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\dfrac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1}.$$

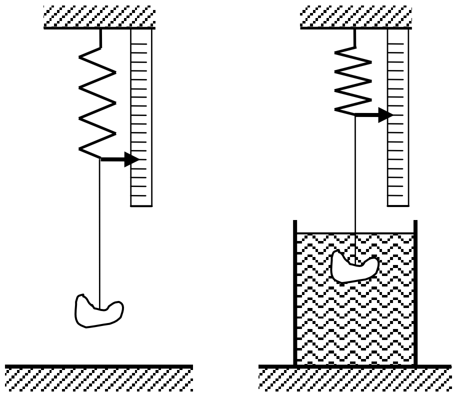
Числовой ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{10{,}000}{10{,}000 - 9{,}040} \cdot \dfrac{1000}{8960} - 1}{\dfrac{119}{64} - 1} \approx 0{,}189$.

Ответ: $\alpha = \dfrac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}} - 1}{\dfrac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}} - 1} \approx 18{,}9\,\%$

Вариант 2.7

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 9,055 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_м$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_м$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{ол}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{Архимеда} = mg - \rho_в gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_в g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_в \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}. \qquad (1)$$

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_м m_м + N_{ол} m_{ол}}{V}$$

где $m_м$, $m_{ол}$ – массы атомов меди и олова, а $N_м$, $N_{ол}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{ол} = \alpha N, \quad N_м = (1-\alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1-\alpha)Nm_м + \alpha N m_{ол}}{V}. \qquad (2)$$

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при α = 0, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_м = \frac{Nm_м}{V}. \qquad (3)$$

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho=\left(1-\alpha+\alpha\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}}=\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho=\left(1-\alpha+\alpha\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}}. \qquad (4)$$

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}}\cdot\frac{P_1}{P_1-P_2}=\left(1-\alpha+\alpha\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right)\rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha=\frac{\frac{P_1}{P_1-P_2}\cdot\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}}-1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}-1}.$$

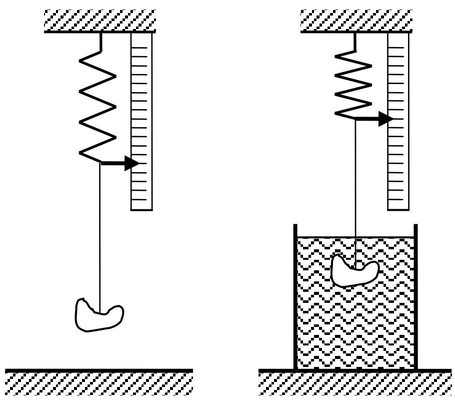
Числовой ответ: $\alpha=\dfrac{\frac{10{,}000}{10{,}000-9{,}055}\cdot\frac{1000}{8960}-1}{\frac{119}{64}-1}\approx 0{,}211.$

Ответ: $\alpha=\dfrac{\frac{P_1}{P_1-P_2}\cdot\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{м}}}-1}{\frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}-1}\approx 21{,}1\%$

Вариант 2.8

Бронза – сплав меди с различными химическими элементами. Под сплавом меди с каким-то элементом понимается случайное замещение части атомов меди в решетке на атомы этого элемента. С древних времен широко использовалась так называемая оловянная бронза, представляющая собой сплав меди с оловом. Такая бронза шла на отливку колоколов, производство пушек, изготовление ювелирных украшений и т. д.

При археологических раскопках нашли бронзовый предмет, взвешивание которого в воздухе дало значение веса P_1 = 10,000 Н, а в воде (см. рис.) P_2 = 9,070 Н. Предмет не содержит полостей. Найти процентное содержание α атомов олова в бронзе, если плотность меди $\rho_{\text{м}}$ = 8960 кг/м^3, плотность воды $\rho_{\text{в}}$ = 1000 кг/м^3, молярная масса меди $M_{\text{м}}$ = 64 г/моль, молярная масса олова $M_{\text{ол}}$ = 119 г/моль. Ответ укажите с точностью до 0.1.



Решение. Для результатов взвешиваний P_1 и P_2 можно написать соотношения:

$$P_1 = mg,$$

$$P_2 = mg - F_{\text{Архимеда}} = mg - \rho_{\text{в}} gV,$$

где m и V – соответственно масса и объем взвешиваемого предмета. Отсюда следует, что

$$m = \frac{P_1}{g}, \quad V = \frac{P_1 - P_2}{\rho_{\text{в}} g}.$$

Следовательно, плотность бронзы равна

$$\rho = \frac{m}{V} = \rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2}. \quad (1)$$

С другой стороны, плотность бронзы может быть записана в виде:

$$\rho = \frac{N_{\text{м}} m_{\text{м}} + N_{\text{ол}} m_{\text{ол}}}{V}$$

где $m_{\text{м}}$, $m_{\text{ол}}$ – массы атомов меди и олова, а $N_{\text{м}}$, $N_{\text{ол}}$ – число соответствующих атомов в веществе. Если обозначить через α долю атомов олова в общем числе N атомов бронзы, то $N_{\text{ол}} = \alpha N, \quad N_{\text{м}} = (1-\alpha)N$, т. е.

$$\rho = \frac{(1-\alpha)Nm_{\text{м}} + \alpha N m_{\text{ол}}}{V}. \quad (2)$$

При отсутствии атомов олова в бронзе, т. е. при $\alpha = 0$, плотность бронзы совпадает с плотностью меди. Из формулы (2) получаем:

$$\rho_{\text{м}} = \frac{Nm_{\text{м}}}{V}. \quad (3)$$

Исключая с помощью соотношения (3) величину N/V из формулы (2), получим плотность бронзы как функцию от процентного содержания α атомов олова в бронзе:

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}}.$$

Учтем, что отношение масс атомов олова и меди равно отношению их молярных масс:

$$\frac{m_{\text{ол}}}{m_{\text{м}}} = \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}.$$

Тогда

$$\rho = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}}. \quad (4)$$

Приравнивая правые части соотношений (1) и (4) для плотности бронзы, получим:

$$\rho_{\text{в}} \cdot \frac{P_1}{P_1 - P_2} = \left(1 - \alpha + \alpha \frac{M_{\text{ол}}}{M_{\text{м}}}\right) \rho_{\text{м}},$$

откуда

$$\alpha = \frac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\dfrac{M_{ол}}{M_м} - 1}.$$

Числовой ответ: $\alpha = \frac{\dfrac{10{,}000}{10{,}000 - 9{,}070} \cdot \dfrac{1000}{8960} - 1}{\dfrac{119}{64} - 1} \approx 0{,}233.$

Ответ: $\alpha = \frac{\dfrac{P_1}{P_1 - P_2} \cdot \dfrac{\rho_в}{\rho_м} - 1}{\dfrac{M_{ол}}{M_м} - 1} \approx 23{,}3\,\%$

<u>Задание 3</u>

Вариант 3.1

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 65 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 145 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 15 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 145-65 = 80(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2\cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5\cdot(OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p-OA)(p-OB)(p-AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \dfrac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \dfrac{SO}{OC} = \dfrac{1}{OC}$. Подставляя значения α=12, β=15 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.316574.

Ответ: 0.32.

Вариант 3.2

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 62 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 20 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 132 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 15 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 132-62 = 70(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем

$OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения α=20, β=15 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.3947.

Ответ: 0.39.

Вариант 3.3

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 60 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 160 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 18 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 160-60 = 100(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения α=12, β=18 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.4245.

Ответ: 0.42.

Вариант 3.4

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 30 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 10 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 100 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 14 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 100-30 = 70(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения α=10, β=14 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.2675.

Ответ: 0.27.

Вариант 3.5

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 25 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 18 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 135 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 15 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 100-30 = 70(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения α=18, β=15 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.51799.

Ответ: 0.52.

Вариант 3.6

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 35 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 10 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 110 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 110-35 = 75(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p-OA)(p-OB)(p-AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения α=10, β=12 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.24689.

Ответ: 0.25.

Вариант 3.7

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 75 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 12 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 140 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 16 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 140-75 = 65(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2 \cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5 \cdot (OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p-OA)(p-OB)(p-AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения α=12, β=16 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.30395.

Ответ: 0.30.

Вариант 3.8

В горной выработке по двум смежным вертикальным стенкам вскрыта плоская рудная жила. В одном сечении горной выработки простиранием на восток 72 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 10 градусов к поверхности Земли. Во втором сечении по смежной стенке, расположенной на юго-восток 140 градусов (азимут от направления на север) жила наклонена на 14 градусов к поверхности Земли. Чему равен тангенс угла между плоскостью жилы и поверхностью Земли? Ответ укажите с точностью 0.01.

Решение.

Пусть точки O,A,B на поверхности Земли, грани SOA и SOB двугранного угла перпендикулярны поверхности Земли, $SO \perp AOB$. Величина угла AOB равна 140-75 = 65(градусов). Обозначим угол SAO через α, угол SBO через β, угол AOB через γ. Тогда, полагая SO=1, отсюда вычисляем $OA = ctg\alpha, OB = ctg\beta, AB = \sqrt{ctg^2\alpha + ctg^2\beta - 2\cdot ctg\alpha \cdot ctg\beta \cdot \cos\gamma}$ и по формуле Герона при $p = 0.5\cdot(OA + OB + AB)$ получаем

$$S_{\Delta AOB} = \sqrt{p(p-OA)(p-OB)(p-AB)}.$$

Обозначая далее высоту треугольника AOB через OC, получаем $OC = \frac{2S_{\Delta AOB}}{AB}$, откуда $tg\angle SCO = \frac{SO}{OC} = \frac{1}{OC}$. Подставляя значения α=10, β=14 (градусов), получаем: $tg\angle SCO$ =0.26488.

Ответ: 0.26.

Задание 4

Вариант 4.1

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 1,02 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,01 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.
Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения

равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально.

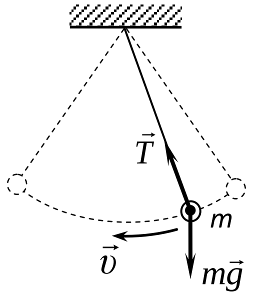


Рис. 1

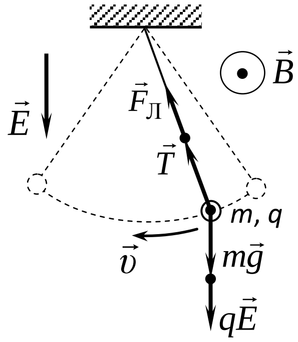


Рис. 2

Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}02}{2{,}01^2} - 9{,}8\right) \approx 157$ кВ/м (167 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 157$ кВ/м

Вариант 4.2

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 1,04 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,04 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_{Л}$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

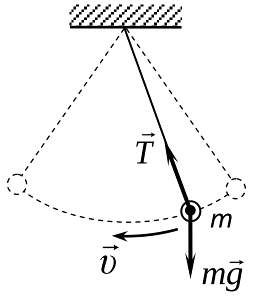


Рис. 1

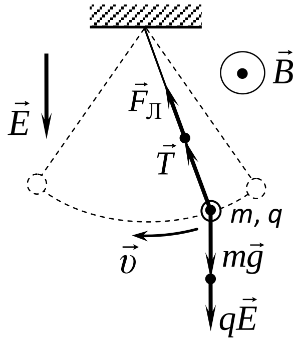


Рис. 2

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}04}{2{,}04^2} - 9{,}8\right) \approx 56$ кВ/м (66 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 56$ кВ/м

Вариант 4.3

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 1,05 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,03 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$

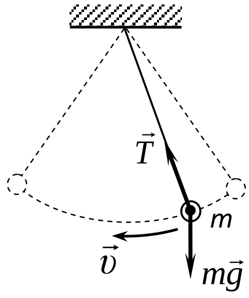


Рис. 1

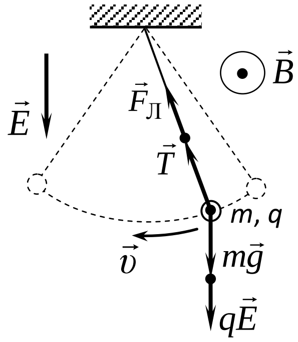


Рис. 2

скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg+qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+\frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 1{,}05}{2{,}03^2} - 9{,}8\right) \approx 249$ кВ/м (259 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 249$ кВ/м

Вариант 4.4

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 1,08 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,07 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_{Л}$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила

$q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а

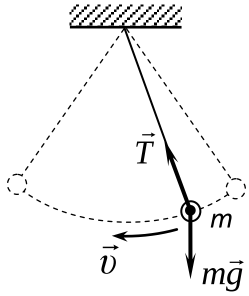


Рис. 1

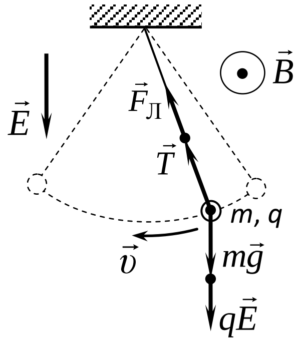


Рис. 2

сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg+qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+\frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \dfrac{m}{q}\left(\dfrac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \dfrac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\dfrac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 1{,}08}{2{,}07^2} - 9{,}8\right) \approx 140$ кВ/м (150 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \dfrac{m}{q}\left(\dfrac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 140$ кВ/м

Вариант 4.5

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 2,08 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,86 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$

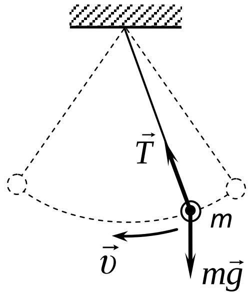


Рис. 1

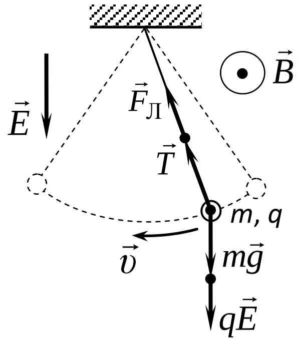


Рис. 2

находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 2{,}08}{2{,}86^2} - 9{,}8\right) \approx 229$ кВ/м (239 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 229$ кВ/м

Вариант 4.6

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 2,07 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,88 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$

находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения

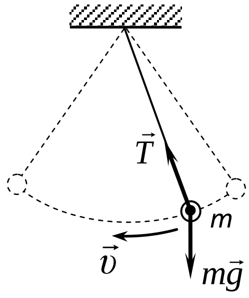


Рис. 1

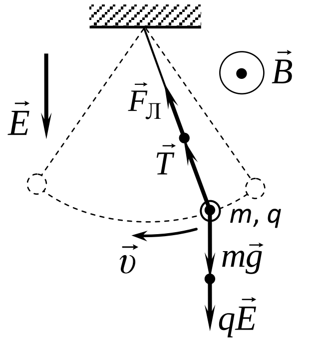


Рис. 2

равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 2{,}07}{2{,}88^2} - 9{,}8\right) \approx 42$ кВ/м (52 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 42$ кВ/м

Вариант 4.7

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 2,09 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,89 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила, действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.

Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

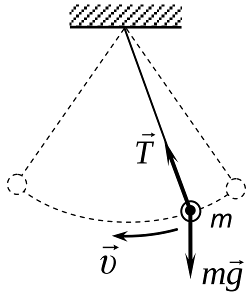


Рис. 1

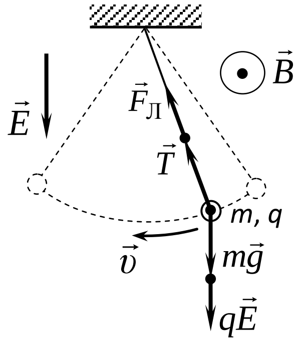


Рис. 2

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_Л$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 2{,}09}{2{,}89^2} - 9{,}8\right) \approx 69$ кВ/м (79 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 69$ кВ/м

Вариант 4.8

Вблизи поверхности Земли всегда присутствуют создаваемые ею постоянные электрические и магнитные поля. Изучение аномалий этих полей часто позволяет судить о наличии подземных залежей тех или иных полезных ископаемых.

Маятник в виде маленького шарика массой m = 10 г, подвешенного на тонкой невесомой нерастяжимой непроводящей нити длиной l = 2,13 м, находится в однородном магнитном и однородном электрическом полях. Шарику маятника сообщили заряд $q = 10^{-8}$ Кл, отвели нить в натянутом состоянии в некоторое исходное положение и отпустили шарик с начальной скоростью, равной нулю. Оказалось, что возникающие при этом колебания маятника происходят с той же амплитудой и в той же вертикальной плоскости, что и колебания этого маятника с незаряженным шариком при тех же начальных условиях. Период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, и равен T = 2,91 с. Найти величину напряженности электрического поля E. Ответ укажите в кВ/м с точностью до единиц (например, 77 кВ/м, 190 кВ/м и т.д.). Принять ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Решение. Исходя из условия задачи, найдем направления векторов индукции магнитного поля $\vec{B}$ и напряженности электрического поля $\vec{E}$. Пока шарик не заряжен, сила,

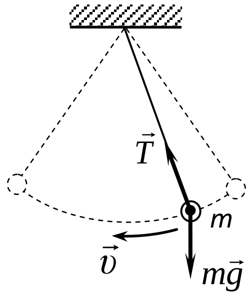


Рис. 1

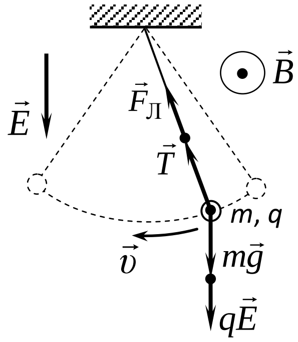


Рис. 2

действующая на него со стороны однородного электрического поля, равна нулю. Сила, действующая на незаряженный шарик со стороны магнитного поля, тоже должна быть равна нулю. Почему? Пусть это не так (например, шарик железный). Чтобы маятник качался в вертикальной плоскости, постоянная по величине и направлению сила, действующая на него со стороны однородного магнитного поля, должна лежать в этой плоскости. Вектор индукции $\vec{B}$ этого поля сонаправлен этой силе и поэтому тоже лежит в плоскости колебаний маятника. Когда шарик заряжен, на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца $\vec{F}_Л$, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Значит, сила Лоренца перпендикулярна плоскости колебаний незаряженного маятника и поэтому выводит заряженный шарик из этой плоскости. Это противоречит условию, поэтому наше исходное предположение, что на незаряженный шарик действует сила со стороны магнитного поля, является неверным. Таким образом, силы, действующие на незаряженный шарик со стороны электрического и магнитного однородных полей, равны нулю.Как уже отмечалось, когда шарик заряжен, при его движении на него со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору $\vec{B}$ и вектору $\vec{v}$ скорости шарика. Кроме того, со стороны электрического поля на шарик действует сила $q\vec{E}$. Чтобы шарик не выходил из плоскости первоначальных колебаний, равнодействующая этих сил должна лежать в этой плоскости. Но сила $q\vec{E}$ постоянна, а сила Лоренца меняется в ходе движения маятника как по величине, так и по направлению. Поэтому обе эти силы должны лежать в вертикальной плоскости колебаний незаряженного маятника. В таком случае вектор $\vec{B}$ перпендикулярен этой плоскости, а сила Лоренца направлена вдоль нити маятника вверх или вниз. Направление вектора $\vec{E}$ находим из требования равенства амплитуд колебаний заряженного и незаряженного маятника при одинаковых начальных условиях. Отсюда следует, что положения равновесия маятника в этих двух случаях совпадают, а это при уже известном направлении силы Лоренца достигается, только если вектор $\vec{E}$ направлен вертикально. Поскольку по условию период малых колебаний маятника с заряженным шариком меньше, чем период колебаний маятника с незаряженным шариком, а заряд шарика $q > 0$, вектор $\vec{E}$ направлен вертикально вниз.

Как видно из рисунка 1, на незаряженный шарик в процессе колебаний действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Изменение модуля скорости $\vec{v}$ шарика (а этим определяется период колебаний маятника) вызвано действием только силы тяжести $m\vec{g}$, у которой проекция на направление скорости шарика отлична от нуля. При этом период малых колебаний этой системы (математического маятника) известен:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg}}\,.$$

Когда шарик заряжен, на него в процессе колебаний действуют, помимо силы тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити $\vec{T}$, сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$ со стороны магнитного поля, направленная вдоль нити, и постоянная вертикальная сила $q\vec{E}$ со стороны электрического поля. Как видно из рисунка 2, в этом случае ненулевую проекцию на направление скорости $\vec{v}$ шарика дает только сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$. Поэтому только этими силами определяется изменение модуля скорости шарика и связанный с этим период колебаний маятника. Таким образом, в случае заряженного шарика сумма сил $m\vec{g} + q\vec{E}$ играет ту же роль, что сила тяжести $m\vec{g}$ в случае незаряженного шарика. Значит, в формуле для периода малых колебаний математического маятника надо заменить mg на $mg + qE$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml}{mg + qE}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{qE}{m}}}\,.$$

Отсюда $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx \frac{0{,}01}{10^{-8}}\left(\frac{4\cdot 3{,}14^2\cdot 2{,}13}{2{,}91^2} - 9{,}8\right) \approx 120$ кВ/м (130 кВ/м, если взять точное значение числа π).

Ответ: $E = \frac{m}{q}\left(\frac{4\pi^2 l}{T^2} - g\right) \approx 120$ кВ/м

Тестовые задания для разминки 1-го тура (10-11 классы):

Угол между географическим меридианом и любым направлением, отсчитанный по часовой стрелке называется:
Широта
Азимут
Вектор

Прозрачная разновидность берилла голубовато-зеленого цвета называется:
Аквамарин
Изумруд
Топаз

Крупная глыба льда, отколовшаяся от берега Арктики или Антарктики и находящаяся в океане:
Ледник
Морена
Айсберг

Полосчатый халцедон называется:
Морион
Агат
Малахит

Разрушение морских берегов прибоем называется
Карстование
Коррозия
Абразия

Осадочный материал, накапливающийся в долинах рек, называется
Аллювий
Морена
Терраса

След упавшего на землю метеорита называется:
Атолл
Астеносфера
Астроблема

Коралловая постройка округлой формы с мелкой лагуной посередине называется:
Бархан
Атолл
Балка

Серповидный песчаный холм с пологим наветренным и крутым подветренным склоном называется:
Риф
Бархан

Атолл

Основными рудами алюминиевой промышленности являются:
Бурые железняки
Каменные угли
Бокситы

Раздробленная на остроугольные обломки и сцементированная горная порода называется:
Брекчия
Конгломерат
Песчаник

Какого цвета изумруд?
Красного
Синего
Зеленого

Какого цвета сапфир?
Красного
Синего
Зеленого

Какого цвета рубин?
Красного
Синего
Зеленого

Как называется место на поверхности Земли с наибольшей силой землетрясения?
Эпицентр
Горячая точка
Кратер

Как называются небольшие неокатанные обломки горных пород?
Валуны
Мел
Гравий

Как называется полоса берега, сложенная песком и заливаемая морем?
Терраса
Пляж
Лагуна

Что образуется в результате карстовых процессов?
Пещера

Кратер
Пляж

Содержание какого газа самое высокое в атмосфере планеты Земля?
Азота
Водорода
Гелия

Укажите самое распространенное химическое соединение в земной коре.
H_2O
CaO
SiO_2

Какая горная порода имеет магматическое происхождение?
Гранит
Глина
Известняк

Какая порода относится к группе осадочных горных пород?
Гранит
Известняк
Базальт

Как называются расплавленные горные породы, изливающиеся из жерла вулкана?
Магма
Гидротермы
Лава

Как называются расплавленные горные породы, находящиеся в земных недрах?
Магма
Гидротермы
Лава

Что относится к продуктам извержения вулкана?
Пепел
Глина
Мрамор