2015 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Заключительный этап (5-9 классы)

Задание 1.

Некоторые химические элементы находятся в земной коре в рассеянном виде. При этом выявлена закономерность их повышенных концентраций в угле. Некоторые элементы накапливаются непосредственно органическим веществом угольных пластов, а другие концентрируются на границе угольного пласта и вмещающих горных пород.

В угольном пласте, толщиной 2 м в зависимости от расстояния h до середины пласта, скандий имеет концентрацию, равную $20(h-1)^2$, а концентрация германия выражается через h как $400h(2-h)$. В пределах каких значений h концентрация скандия не меньше 5 (г/т), и в то же время концентрация германия не меньше 300 (г/т)?

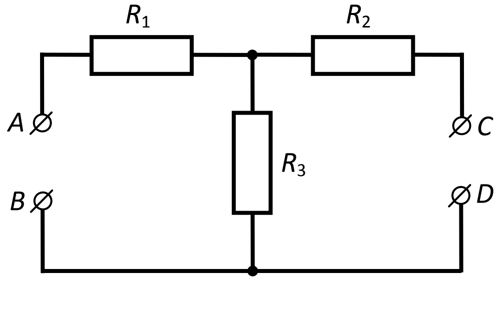
Решение.

Для скандия задача сводится к решению неравенства $20(h-1)^2 \geq 5$. Это неравенство перепишем в виде $(h-1)^2 \geq \frac{1}{4}$, что эквивалентно $|h-1| \geq \frac{1}{2}$. Это означает, что необходимая в условии задачи доля скандия находится на расстоянии, не меньшем $\frac{1}{2}$ м от середины пласта. Для германия необходимое расстояние h соответствует неравенству $400h(2-h) \geq 300$, из которого $h^2 - 2h + \frac{3}{4} \leq 0 \Leftrightarrow |h-1| \leq \frac{1}{2}$. Это означает, что необходимая в условии задачи доля скандия находится на расстоянии, не большем $\frac{1}{2}$ м от середины пласта.

Ответ: на расстоянии $\frac{1}{2}$ м от середины пласта

Задание 2.

1. В геологических исследованиях применяются разнообразные электронные приборы.
На рисунке показана схема участка электрической цепи такого прибора. Если между точками A и B приложено напряжение U, то напряжение между точками C и D равно $U_1 = 0{,}5U$. Если то же самое напряжение U приложено между точками C и D, то напряжение между точками A и B равно $U_2 = 0{,}2U$.
Найдите отношение сопротивлений резисторов R_2/R_1.



Решение.

Когда между точками A и B приложено напряжение U (см. рисунок 1), через резисторы R_1 и R_3 течет постоянный ток. Цепь резистора R_2 при этом незамкнута, поэтому ток I через резистор R_2 равен нулю. Тогда по закону Ома для участка цепи напряжение между точками C и F $U_{CF} = IR_2 = 0$.

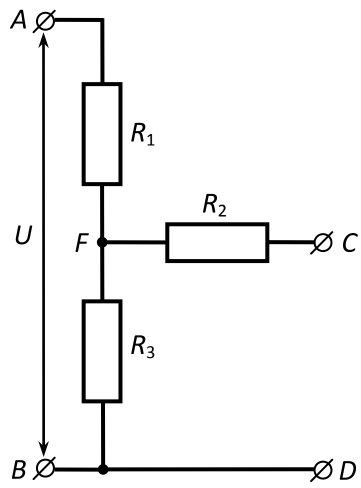


Рис. 1

Поскольку ток через резистор R_2 равен нулю, через резисторы R_1 и R_3 течет один и тот же ток $I_1 = \dfrac{U}{R_1 + R_3}$.

Благодаря этому напряжение на резисторе R_3 равно $U_{FD} = I_1 R_3 = U \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$.

Напряжение между точками C и D $U_{CD} = U_{CF} + U_{FD} = U \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$. С другой стороны, по условию задачи $U_{CD} = U_1 = 0{,}5U$. Отсюда следует уравнение $\dfrac{R_3}{R_1 + R_3} = 0{,}5$ с решением $R_1 = R_3$.

Пусть теперь напряжение U приложено между точками C и D (см. рисунок 2). Через резисторы R_2 и R_3 течет постоянный ток. Цепь резистора R_1 при этом незамкнута, поэтому ток I через резистор R_1 равен нулю. Тогда по закону Ома для участка цепи напряжение между точками A и F $U_{AF} = IR_1 = 0$.

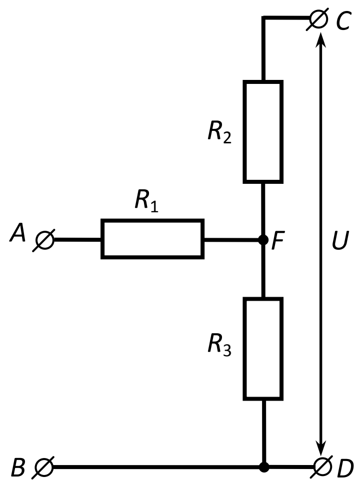


Рис. 2

Поскольку ток через резистор R_1 равен нулю, через резисторы R_2 и R_3 течет один и тот же ток $I_2 = \dfrac{U}{R_2 + R_3}$.

Благодаря этому напряжение на резисторе R_3 равно $U_{FB} = I_2 R_3 = U \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$.

Напряжение между точками A и B $U_{AB} = U_{AF} + U_{FB} = U \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$. С другой стороны, по условию задачи $U_{AB} = U_2 = 0{,}2U$. Отсюда следует уравнение $\dfrac{R_3}{R_2 + R_3} = 0{,}2$ с решением $R_2 = 4R_3$.

В результате имеем: $\dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{4R_3}{R_3} = 4$.

Ответ: $\dfrac{R_2}{R_1} = 4$.

Задание 3.

При проектировании инженерно-геологических сооружений необходимо учитывать возможные сдвиги грунтов. С этой проблемой связана следующая задача.

Опора подземного сооружения представляет собой прямоугольный треугольник с вертикальным катетом CA и горизонтальным CB, точка B справа от C, длины CA и CB равны соответственно 4 и 3 м. В результате сдвига грунта точка A осталась на месте, точки C и B сместились вдоль прямой CB вправо на $\frac{1}{2}$ м. Таким образом треугольник ABC превратился в треугольник AB_1C_1: $CC_1 = BB_1 = \frac{1}{2}$. Чему равна длина отрезка C_1D, где D – середина B_1A?

Решение.

По теореме Пифагора: $C_1A^2 = 16 + \frac{1}{4} = \frac{65}{4}; B_1A^2 = 16 + \frac{7}{4} = \frac{71}{4}$. Теперь медиану C_1D в треугольнике AB_1C_1 найдем из равенства $C_1D^2 = \frac{1}{2}(C_1A^2 + C_1B_1^{\ 2}) - \frac{1}{4}B_1A_1^2 = \frac{1}{2}\cdot(\frac{65}{4}+9) - \frac{1}{4}\cdot\frac{71}{4} = \frac{131}{16}$.

Отсюда следует, что $C_1D = \frac{\sqrt{131}}{4}$

Ответ: $\frac{\sqrt{131}}{4}$

Задание 4.

Блеск и «игра» драгоценных камней вызваны многократным преломлением и отражением света.

Два одинаковых прямоугольных зеркала соприкасаются длинными сторонами (см. рисунок 3). Проведем плоскость перпендикулярно общей стороне зеркал. В этой плоскости пустим узкий луч света *AB* на правое зеркало так, чтобы он прошел над самым краем левого зеркала (см. рисунок 4). Сколько раз луч отразится от зеркал, прежде чем выйдет наружу, если угол между зеркалами α = 10°, а угол падения луча на правое зеркало β = 68°?

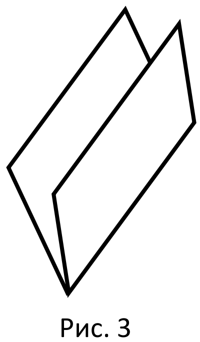


Рис. 3

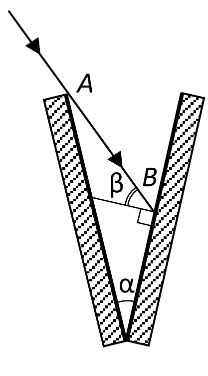


Рис. 4

Решение.

Распространение луча между зеркалами после его первого отражения от правого зеркала равносильно распространению продолжения этого луча по первоначальной прямой за правым зеркалом (см. рисунок 5).

Поэтому возможное решение задачи сводится к геометрическому построению: из общей точки O строим отрезки равной длины так, чтобы соседние отрезки образовали при вершине O угол α (см. рисунок 6). Длина отрезков равна длине короткой стороны зеркала. Проводим через точку A прямую, которая падает на отрезок OA_1 в точке B под углом β, и считаем, сколько построенных нами отрезков пересекла эта прямая. Это ответ.

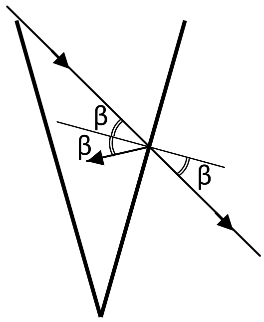


Рис. 5

Число отражений можно получить в общем виде с помощью формулы, вытекающей из сделанных построений. Поскольку $\angle ABO = \beta + 90°$, а $\angle AOB = \alpha$, то

$\angle OAB = \gamma = 90° - \alpha - \beta$.

Концы отрезков, проведенных из точки O, лежат на окружности, которую прямая AB пересекает в точке C. Треугольник AOC – равнобедренный. Поэтому $\angle ACO = \gamma$, $\angle AOC = 180° - 2\gamma = 2(\alpha + \beta)$.

Число отражений n подчинено системе неравенств:

$n\alpha \le 2(\alpha + \beta) < (n+1)\alpha$.

Учитывая, что n – целое число, получаем: $n = [2(1 + \beta/\alpha)]$, где $[x]$ – целая часть x. Подставляя сюда числовые значения α и β, получаем n = 15.

Ответ: $n = [2(1 + \beta/\alpha)] = 15$ раз, где $[x]$ – целая часть x.

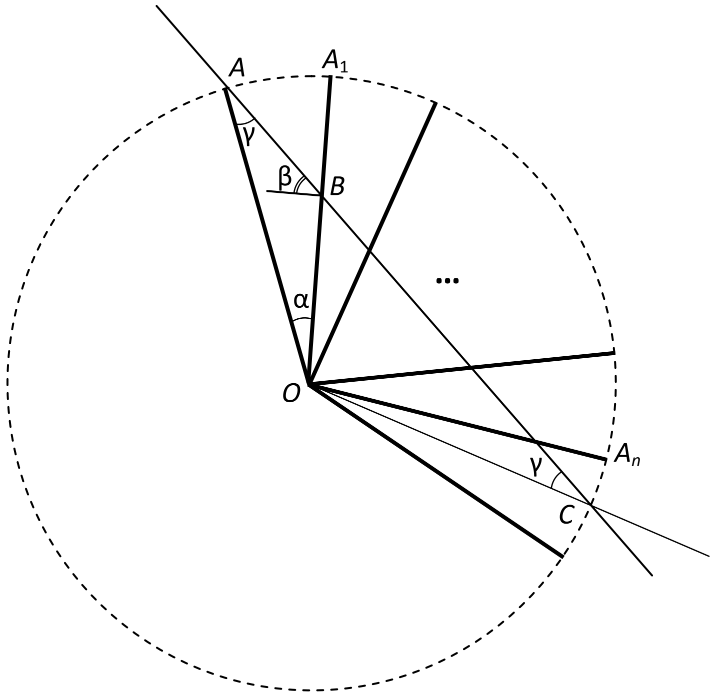


Рис. 6

2015 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ

Ответы на задания заключительного этапа (5-9 классы)

Номер задания	**Ответ**
Задание 1.	на расстоянии 0.5 м от середины пласта
Задание 2.	$R_2/R_1 = 4$
Задание 3.	$\frac{\sqrt{131}}{4}$
Задание 4.	15 раз

<u>Критерии оценки решений</u>

Критерии оценки	Баллы			
	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4
Задание выполнено правильно: ответ верен, в работе есть полное обоснование полученного ответа	25	25	25	25
Задание выполнено с небольшими недочетами: - арифметическая ошибка на завершающем этапе при полностью правильном алгоритме решения, что повлекло за собой неверный ответ; - правильный ответ при недостаточно полном обосновании, как он получен.	15	15	15	15
Задание выполнено с существенными недочетами: решение было начато правильно, но не доведено до ответа из-за принципиальной ошибки в рассуждениях.	5	5	5	5
Задание не выполнено: - решение с самого начала велось неверным путем; - отсутствие решения в работе.	0	0	0	0

2014/2015 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников

«ЛОМОНОСОВ»

по геологии

5-9 классы

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **95** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **50** баллов до **94** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **80** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **70** баллов до **79** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **60** баллов до **69** баллов включительно.*

---

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии*