**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»**
**2013-2014 учебный год**

*ЗАДАНИЯ 2-го ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА*
*ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ «ГЕОЛОГИЯ»*
*ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ*

## Задание 1

**Вариант 1.1.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6000 ккал/т, второй марки – 5100 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1640 руб., а второй марки - 1500 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6 млн ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1740 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6000, q=5100, A=6000000, r=1640, s=1500, B=1740000, получим x=198.113, y=943.396226. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x=919.81, y=94.34. Это означает увеличение x на 721.7 т.

**Ответ:** 722

**Вариант 1.2.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6100 ккал/т, второй марки – 5200 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1650 руб., а второй марки - 1490 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 5900 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1680 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 80 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6100, q=5200, A=5900000, r=1650, s=1490, B=1680000, получим x=108.55, y=1007.86. Если значение B уменьшить на 80000, то координаты решения примут значения x=925.34, y=49.12. Это означает увеличение x на 817.3 т.

**Ответ:** 817

**Вариант 1.3.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6200 ккал/т, второй марки – 5250 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1630 руб., а второй марки - 1500 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6200 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1750 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px + qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx + sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x = \dfrac{A - \frac{q}{s}B}{p - \frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px + qy = A, \\ rx + sy = B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6200, q=5250, A=6200000, r=1630, s=1500, B=1750000, получим x= 151,515, y= 1002,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 787,88, y= 250,5. Это означает увеличение x на 636.4 т.

**Ответ:** 636

**Вариант 1.4.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 5900 ккал/т, второй марки – 5000 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1500 руб., а второй марки - 1460 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6200 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px + qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx + sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x = \dfrac{A - \frac{q}{s}B}{p - \frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px + qy = A, \\ rx + sy = B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=5900, q=5000, A=6200000, r=1500, s=1460, B=1700000, получим x=495,5, y=655,3,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x=899,46, y=178,64. Это означает увеличение x на 403,9 т.

**Ответ:** 404

**Вариант 1.5.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 5950 ккал/т, второй марки – 5100 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1550 руб., а второй марки - 1460 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6100 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=5950, q=5100, A=6100000, r=1550, s=1460, B=1700000, получим x= 301,8, y= 844,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 888,75, y= 159,2. Это означает увеличение x на 587 т.

**Ответ:** 587

**Вариант 1.6.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 5890 ккал/т, второй марки – 4900 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1600 руб., а второй марки - 1550 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 5700 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1650 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=5890, q=4900, A=5700000, r=1600, s=1550, B=1700000, получим x= 581,6, y= 464,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 923,6, y= 53. Это означает увеличение x на 342 т.

**Ответ:** 342

**Вариант 1.7.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6100 ккал/т, второй марки – 4900 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1620 руб., а второй марки - 1450 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6000 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px + qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx + sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x = \dfrac{A - \frac{q}{s}B}{p - \frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px + qy = A, \\ rx + sy = B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6100, q=4900, A=6000000, r=1620, s=1450, B=1700000, получим x= 408, y= 716,6,. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x=894, y= 111. Это означает увеличение x на 486 т.

**Ответ:** 486

**Вариант 1.8.** Горнодобывающее предприятие продает городу для бытовых нужд уголь двух марок. Теплоемкость угля первой марки равна 6200 ккал/т, второй марки – 5200 ккал/т, цена тонны угля первой марки равна 1610 руб., а второй марки - 1460 руб. Общая потребность города в тепле составляет не менее 6100 тыс. ккал в месяц, для закупки угля город из бюджета всегда выделял ежемесячно 1700 тыс. руб. В связи с переходом на режим экономии принято решение выделить на декабрь на 90 тыс. руб. меньше. Насколько увеличится в декабре минимально возможный объем закупки угля первой марки? Ответ дайте с точностью до 1 тонны.

**Решение.** Пусть угля первой марки закупается x т, а второй марки – y т. Если p – теплоемкость угля первой марки, а q - теплоемкость угля второй марки, то общая теплоемкость равна $px+qy$, по условию эта сумма не менее A ккал. Далее, если r – цена тонны угля первой марки, а s – цена тонны угля второй марки, то общая стоимость закупленного угля равна $rx+sy$, по условию эта сумма равна 1740 тыс. руб. Минимально возможный объем закупленного угля первой марки равен $x=\dfrac{A-\frac{q}{s}B}{p-\frac{q}{s}r}$ – первой координате (x,y) решения системы уравнений

$$\begin{cases} px+qy=A, \\ rx+sy=B \end{cases}$$

Решая последнюю систему при заданных значениях p=6200, q=5200, A=6100000, r=1610, s=1460, B=1700000, получим x= 97, y= 1057.. Если значение B уменьшить на 90000, то координаты решения примут значения x= 785, y=.237. Это означает увеличение x на 688 т.

**Ответ:** 688

## Задание 2

**Вариант 2.1.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1$ = 15$\cdot$10$^6$ Па и температуре $t_1$ = 20 $^o$C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2$ = 5,5$\cdot$10$^6$ Па и температуре $t_2$ = 10 $^o$C. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1$ = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3$ = –30 $^o$C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2$ = 10 $^o$C составляет $p_{н2}$ = 1227 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3$ = –30 $^o$C составляет $p_{н3}$ = 38 Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже 10$^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \dfrac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \dfrac{T_2}{T_3} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} = p_{н3} \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,\text{пара}}}{p_{\text{н}2}} = \dfrac{p_{\text{н}3}}{p_{\text{н}2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{38}{1227} \cdot \dfrac{293}{243} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}4\,\%$.

**Ответ:** 1,4

**Вариант 2.2.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15\cdot10^6$ Па и температуре $t_1 = 20$ °C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5\cdot10^6$ Па и температуре $t_2 = 15$ °C. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -30$ °C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 15$ °C составляет $p_{н2} = 1705$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -30$ °C составляет $p_{н3} = 38$ Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1kT_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже $10^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1kT_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}\cdot\dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,пара}V_2}{T_2} = \dfrac{p_{н3}V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3}\dfrac{T_2}{T_3}\cdot\dfrac{V_1}{V_2} = p_{н3}\dfrac{T_1}{T_3}\cdot\dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,\text{пара}}}{p_{\text{н}2}} = \dfrac{p_{\text{н}3}}{p_{\text{н}2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{38}{1705} \cdot \dfrac{293}{243} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}0\%$.

**Ответ:** 1,0

**Вариант 2.3.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1$ = $15\cdot10^6$ Па и температуре $t_1$ = 20 $^{\circ}$C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2$ = $5{,}5\cdot10^6$ Па и температуре $t_2$ = 10 $^{\circ}$C. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1$ = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3$ = –35 $^{\circ}$C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2$ = 10 $^{\circ}$C составляет $p_{\text{н}2}$ = 1227 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3$ = –35 $^{\circ}$C составляет $p_{\text{н}3}$ = 22,3 Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже $10^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{\text{н}3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,\text{пара}}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,\text{пара}}V_2}{T_2} = \dfrac{p_{\text{н}3}V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,\text{пара}} = p_{\text{н}3}\dfrac{T_2}{T_3}\cdot\dfrac{V_1}{V_2} = p_{\text{н}3}\dfrac{T_1}{T_3}\cdot\dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,\text{пара}}}{p_{\text{н}2}} = \dfrac{p_{\text{н}3}}{p_{\text{н}2}}\cdot\dfrac{T_1}{T_3}\cdot\dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{22{,}3}{1227}\cdot\dfrac{293}{238}\cdot\dfrac{5{,}5\cdot10^6}{15\cdot10^6} \approx 0{,}8\,\%$.

**Ответ:** 0,8

**Вариант 2.4.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15\cdot10^6$ Па и температуре $t_1 = 20$ °С, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5\cdot10^6$ Па и температуре $t_2 = 15$ °С. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -35$ °С. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 15$ °С составляет $p_{\text{н}2} = 1705$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -35$ °С составляет $p_{\text{н}3} = 22{,}3$ Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \dfrac{N_1kT_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже $10^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1kT_2}{p_2}$. Иными словами, мы

пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\frac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \frac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \frac{T_2}{T_3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = p_{н3} \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \frac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \frac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \frac{22{,}3}{1705} \cdot \frac{293}{238} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 0{,}6\,\%$.

**Ответ:** 0,6

**Вариант 2.5.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1$ = 15⋅10$^6$ Па и температуре $t_1$ = 50 $^{o}$C, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2$ = 5,5⋅10$^6$ Па и температуре $t_2$ = 10 $^{o}$C. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1$ = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3$ = –30 $^{o}$C. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2$ = 10 $^{o}$C составляет $p_{н2}$ = 1227 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3$ = –30 $^{o}$C составляет $p_{н3}$ = 38 Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \frac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже 10$^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно

меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \frac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\frac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \frac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \frac{T_2}{T_3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = p_{н3} \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \frac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \frac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \frac{38}{1227} \cdot \frac{323}{243} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}5\%$.

**Ответ:** 1,5

**Вариант 2.6.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15 \cdot 10^6$ Па и температуре $t_1 = 50\ ^oC$, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5 \cdot 10^6$ Па и температуре $t_2 = 15\ ^oC$. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -30\ ^oC$. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 15\ ^oC$ составляет $p_{н2} = 1705$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -30\ ^oC$ составляет $p_{н3} = 38$ Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем

$V_1 = \dfrac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже $10^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \dfrac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1} \cdot \dfrac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\dfrac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \dfrac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \dfrac{T_2}{T_3} \cdot \dfrac{V_1}{V_2} = p_{н3} \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \dfrac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \dfrac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \dfrac{T_1}{T_3} \cdot \dfrac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \dfrac{38}{1705} \cdot \dfrac{323}{243} \cdot \dfrac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 1{,}1\%$.

**Ответ:** 1,1

**Вариант 2.7.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1 = 15 \cdot 10^6$ Па и температуре $t_1 = 50\ ^oC$, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2 = 5{,}5 \cdot 10^6$ Па и температуре $t_2 = 10\ ^oC$. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1 = 100$ % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -35\ ^oC$. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 10\ ^oC$ составляет $p_{н2} = 1227$ Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -35\ ^oC$ составляет $p_{н3} = 22{,}3$ Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \frac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже $10^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \frac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\frac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \frac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \frac{T_2}{T_3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = p_{н3} \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \frac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \frac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \frac{22{,}3}{1227} \cdot \frac{323}{238} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 0{,}9\%$.

**Ответ:** 0,9

**Вариант 2.8.** Для предотвращения коррозии газопровода при транспортировке по нему природного газа важно удалить из газа максимальное количество паров воды. Осушение газа достигается удалением конденсата, образующегося из водяного пара при охлаждении газа до низких температур.

Природный газ, добываемый на газовом месторождении при давлении $p_1$ = 15$\cdot 10^6$ Па и температуре $t_1$ = 60 $^oC$, после осушения и понижения давления транспортируется по газопроводу при давлении $p_2$ = 5,5$\cdot 10^6$ Па и температуре $t_2$ = 15 $^oC$. Найти относительную влажность $\varphi_2$ газа, транспортируемого по газопроводу, если при добыче газ имел относительную влажность $\varphi_1$ = 100 % и для его осушения использовалось изохорное понижение температуры до значения $t_3 = -35\ ^{\circ}C$. Ответ в процентах округлить до десятых долей.

Давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 15\ ^{\circ}C$ составляет $p_{н2}$ = 1705 Па, давление насыщенных паров воды над поверхностью льда при температуре $t_3 = -35\ ^{\circ}C$ составляет $p_{н3}$ = 22,3 Па.

**Решение**

1. Рассмотрим в первоначальном состоянии (при давлении $p_1$ и температуре $t_1$) $N_1$ молекул природного газа, включая молекулы воды. Согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, это количество молекул занимает в первоначальном состоянии объем $V_1 = \frac{N_1 k T_1}{p_1}$. При осушении часть молекул воды конденсируется, и в газопровод попадает число молекул $N_2 < N_1$. Однако разницей между $N_1$ и $N_2$ можно пренебречь, потому что давление насыщенного водяного пара при температуре $t_1$ значительно ниже $10^5$ Па и, следовательно, доля молекул воды в общем числе молекул природного газа значительно меньше 1/150. При осушении доля молекул воды в природном газе становится еще меньше. Поэтому будем считать, что в конечном состоянии (при давлении $p_2$ и температуре $t_2$) тоже находится $N_1$ молекул природного газа, и они, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, занимают объем $V_2 = \frac{N_1 k T_2}{p_2}$. Иными словами, мы пренебрегаем числом молекул воды по сравнению с общим числом молекул природного газа. Тогда из формул для объемов следует, что $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}$.

2. При изохорном понижении температуры первоначально насыщенный водяной пар остается насыщенным, а его давление монотонно уменьшается, достигая при температуре $t_3$ значения $p_{н3}$.

3. При переходе водяного пара из состояния с температурой $t_3$ в конечное состояние количество молекул пара не меняется, поэтому, согласно объединенному газовому закону, парциальное давление водяного пара в конечном состоянии $p_{2\,пара}$ определяется из равенства $\frac{p_{2\,пара} V_2}{T_2} = \frac{p_{н3} V_1}{T_3}$, откуда $p_{2\,пара} = p_{н3} \frac{T_2}{T_3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = p_{н3} \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

4. Относительная влажность природного газа в конечном состоянии согласно определению равна $\varphi = \frac{p_{2\,пара}}{p_{н2}} = \frac{p_{н3}}{p_{н2}} \cdot \frac{T_1}{T_3} \cdot \frac{p_2}{p_1}$.

Численный ответ: $\varphi = \frac{22{,}3}{1705} \cdot \frac{333}{238} \cdot \frac{5{,}5 \cdot 10^6}{15 \cdot 10^6} \approx 0{,}7\,\%$.

**Ответ:** 0,7

## Задание 3

**Вариант 3.1.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 450 м, четыре стены которого наклонены под углом 61 градус к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 16 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 10 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1$, $C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1 - p)^3, k_2 = k \cdot (1 - p - q)^3$$

Теперь x= $\frac{1 - k_2}{1 - k_1} - 1 = \frac{1 - k(1 - p - q)^3}{1 - k(1 - p)^3} - 1$

Подставляя значения b=450 м, β=61 градусов, α= 10 градусов, h=16м, a= 6 м, получим

p=0.039, q=0.0166, k=0.7487, откуда следует x=0.10.

**Ответ:** 0.10.

**Вариант 3.2.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 800 м, четыре стены которого наклонены под углом 58 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 7 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 17 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 8 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1$, $C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1 - k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN} \cdot \frac{SP}{SR} = (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta) \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta - 2\frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})\cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b}ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$
$$k_1 = k\cdot(1-p)^3, k_2 = k\cdot(1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1}-1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3}-1$

Подставляя значения b=800 м, β=58 градусов, α= 8 градусов, h=17 м, a= 7 м, получим

p=0.0266, q=0.0121, k=0.771, откуда следует x=0.09

**Ответ:** 0.09

**Вариант 3.3.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 700 м, четыре стены которого наклонены под углом 56 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 24 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 9 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1, C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V-k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta - 2\frac{a}{b}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})\cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b}ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$
$$k_1 = k\cdot(1-p)^3, k_2 = k\cdot(1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=800 м, β=58 градусов, α= 9 градусов, h=24 м, a= 6 м, получим

p=0.04625, q=0.0131, k=0.729, откуда следует x=0.07

**Ответ:** 0.07

**Вариант 3.4.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 450 м, четыре стены которого наклонены под углом 50 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 22 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 4 градуса к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1$, $C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1 - k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN} \cdot \frac{SP}{SR} = (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta) \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1 - p)^3, k_2 = k \cdot (1 - p - q)^3$$

Теперь x= $\frac{1 - k_2}{1 - k_1} - 1 = \frac{1 - k(1 - p - q)^3}{1 - k(1 - p)^3} - 1$

Подставляя значения b=450 м, β=50 градусов, α= 4 градуса, h=22 м, a= 6 м, получим

p=0.082, q=0.0238, k=0.84, откуда следует x=0.14

**Ответ:** 0.14

**Вариант 3.5.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 800 м, четыре стены которого наклонены под углом 50 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 8 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 20 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 6 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1, C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA}=\frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA}=\frac{SR}{SN}$. Далее, $SM=SN=\frac{b}{2\cos\beta}, NR=\frac{h}{\sin\beta}, RT=\frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1=k_1V$, где $k_1=\frac{1}{2}\frac{SR\cdot SP\cdot(SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2=k_2V$, где $k_2=\frac{1}{2}\frac{ST\cdot SQ\cdot(ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V-k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1}=\frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1}=\frac{(1-k_2)}{1-k_1}-1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN}=1-\frac{NR}{SN}=1-\frac{h}{SN\sin\beta}=1-2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN}=\frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR}=(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1=\frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1-p)^3, k_2 = k \cdot (1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=800 м, β=50 градусов, α= 6 градусов, h=20 м, a= 8 м, получим

p=0.042, q=0.0185, k=0.77, откуда следует x=0.12

**Ответ:** 0.12

**Вариант 3.6.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 700 м, четыре стены которого наклонены под углом 48 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 11 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 21 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 5 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1, C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA}=\frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA}=\frac{SR}{SN}$. Далее, $SM=SN=\frac{b}{2\cos\beta}, NR=\frac{h}{\sin\beta}, RT=\frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1=k_1V$, где $k_1=\frac{1}{2}\frac{SR\cdot SP\cdot(SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2=k_2V$, где $k_2=\frac{1}{2}\frac{ST\cdot SQ\cdot(ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V-k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1}=\frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1}=\frac{(1-k_2)}{1-k_1}-1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN}=1-\frac{NR}{SN}=1-\frac{h}{SN\sin\beta}=1-2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN}=\frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR}=(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1=\frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b} \frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k \cdot (1 - p)^3, k_2 = k \cdot (1 - p - q)^3$$

Теперь x= $\frac{1 - k_2}{1 - k_1} - 1 = \frac{1 - k(1 - p - q)^3}{1 - k(1 - p)^3} - 1$

Подставляя значения b=700 м, β=48 градусов, α= 5 градусов, h=21 м, a= 11 м, получим

p=0.054, q=0.0308, k=0.79, откуда следует x=0.19

**Ответ:** 0.19

**Вариант 3.7.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 800 м, четыре стены которого наклонены под углом 52 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 9 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 19 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 8 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1, C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA}=\frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA}=\frac{SR}{SN}$. Далее, $SM=SN=\frac{b}{2\cos\beta}, NR=\frac{h}{\sin\beta}, RT=\frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ=\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1=k_1V$, где $k_1=\frac{1}{2}\frac{SR\cdot SP\cdot(SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2=k_2V$, где $k_2=\frac{1}{2}\frac{ST\cdot SQ\cdot(ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V-k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1}=\frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1}=\frac{(1-k_2)}{1-k_1}-1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN}=1-\frac{NR}{SN}=1-\frac{h}{SN\sin\beta}=1-2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN}=\frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR}=(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1=\frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2} \cdot (1 - 2\frac{h}{b} ctg\beta - 2\frac{a}{b} \cdot \frac{co\mathrm{s}\,\beta}{\sin(\beta - \alpha)})^3 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b} ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta - \alpha)}, k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)}) \Rightarrow$$
$$k_1 = k \cdot (1 - p)^3, k_2 = k \cdot (1 - p - q)^3$$

Теперь x= $\frac{1 - k_2}{1 - k_1} - 1 = \frac{1 - k(1 - p - q)^3}{1 - k(1 - p)^3} - 1$

Подставляя значения b=800 м, β=52 градусов, α= 8 градуов, h=19 м, a= 9 м, получим

p=0.037, q=0.0199, k=0.72, откуда следует x=0.11

**Ответ:** 0.11

**Вариант 3.8.** Для добычи бурого угля сооружается сужающийся вглубь котлован, на поверхности в форме квадрата со стороной 700 м, четыре стены которого наклонены под углом 55 градусов к горизонту. Основанием котлована является кровля угольного пласта толщиной 6 м, верхняя точка пласта внутри котлована находится на глубине 20 м. Пласт параллелен одной из сторон квадрата на верхней границе котлована и наклонен под углом 8 градусов к горизонту. Чему равно отношение объема угля в котловане к объему вынутой пустой породы? Ответ дайте с точностью до 0.01.

**Решение.** Пусть отверстие на поверхности – квадрат ABCD со стороной b. Продолжим боковые стены котлована вглубь до их пересечения в точке S, получим правильную четырехугольную пирамиду SABCD. В ней величина двугранного угла между основанием и боковыми гранями равна β. Пусть далее параллельные сечения $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ представляют собой верхнюю и нижнюю грани угольного пласта. По условию эти сечения образуют угол α с плоскостью ABCD, при этом $A_2B_2 \parallel A_1B_1 \parallel AB, C_2D_2 \parallel C_1D_1 \parallel CD$. Верхняя точка пласта внутри котлована - произвольная точка отрезка $A_1B_1$ находится на глубине h. Толщину пласта обозначим через a. Пусть точки N,R,T – середины отрезков AB, $A_1B_1$, $A_2B_2$ соответственно, а точки M,P,Q – соответственно середины CD, $C_1D_1$, $C_2D_2$. Тогда углы SRP и STQ равны β-α, а углы SPR и SQT равны β+α. Треугольники SAB, $SA_1B_1$ и $A_2B_2$ подобны, поэтому $\frac{SA_2}{SA} = \frac{ST}{SN}, \frac{SA_1}{SA} = \frac{SR}{SN}$. Далее, $SM = SN = \frac{b}{2\cos\beta}, NR = \frac{h}{\sin\beta}, RT = \frac{a}{\sin(\beta-\alpha)}$. Отрезки SR=SN-NR, ST=SR-RT. В треугольнике SPR по теореме косинусов $\frac{SP}{\sin(\beta-\alpha)} = \frac{SR}{\sin(\beta+\alpha)} \Leftrightarrow SP = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot SR$

Треугольники SQT и SPR подобны, поэтому $SQ = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot ST$. Обозначим через V объем пирамиды SABCD, тогда объем пирамиды $SA_1B_1C_1D_1 = k_1V$, где $k_1 = \frac{1}{2}\frac{SR \cdot SP \cdot (SR+SP)}{SN^3}$. Аналогично объем пирамиды $SA_2B_2C_2D_2 = k_2V$, где $k_2 = \frac{1}{2}\frac{ST \cdot SQ \cdot (ST+SQ)}{SN^3}$. Объем угля в котловане равен $(k_1-k_2)V$, а объем вынутого грунта равен $V - k_1V$, откуда искомое коэффициент равен $\frac{k_1-k_2}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)-(1-k_1)}{1-k_1} = \frac{(1-k_2)}{1-k_1} - 1$. Найдем это отношение.

$$\frac{SR}{SN} = 1 - \frac{NR}{SN} = 1 - \frac{h}{SN\sin\beta} = 1 - 2\frac{h}{b}ctg\beta; \frac{SP}{SN} = \frac{SR}{SN}\cdot\frac{SP}{SR} = (1-2\frac{h}{b}ctg\beta)\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta)^3 \cdot \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)} \cdot (1 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})$$

Аналогично

$$k_2 = \frac{1}{2}\cdot(1-2\frac{h}{b}ctg\beta - 2\frac{a}{b}\cdot\frac{cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)})^3\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)})\cdot$$

Введем обозначения:

$$p = 2\frac{h}{b}ctg\beta, q = 2\frac{a}{b}\frac{\cos\beta}{\sin(\beta-\alpha)}, k = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}\cdot(1+\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)}) \Rightarrow$$

$$k_1 = k\cdot(1-p)^3, k_2 = k\cdot(1-p-q)^3$$

Теперь x= $\frac{1-k_2}{1-k_1} - 1 = \frac{1-k(1-p-q)^3}{1-k(1-p)^3} - 1$

Подставляя значения b=700 м, β=55 градусов, α= 8 градусов, h=20 м, a= 6 м, получим

p=0.04, q=0.0134, k=0.747, откуда следует x=0.08

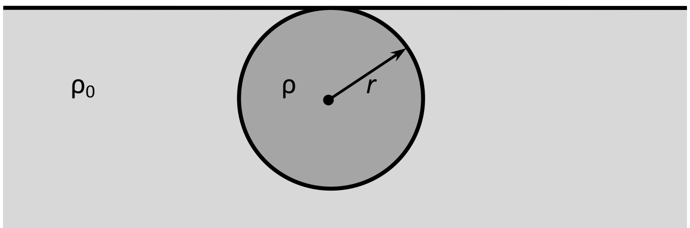
**Ответ:** 0.08

## Задание 4

**Вариант 4.1.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}01$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.

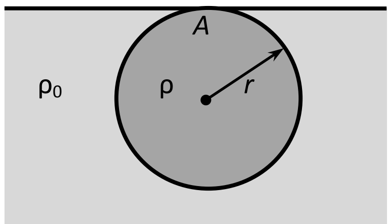



Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).




3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного

притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила гравитационного притяжения со стороны шара плотностью $(\rho - \rho_0)$ и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

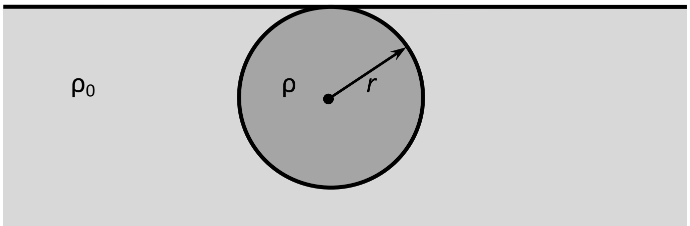
Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (4800 - 2300)} \approx 2800$ м.

**Ответ:** 2,8

**Вариант 4.2.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}01$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.

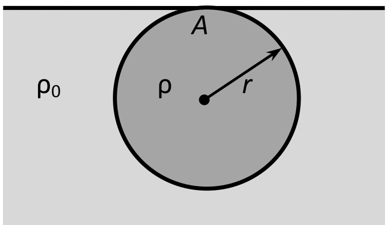



Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).




3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила

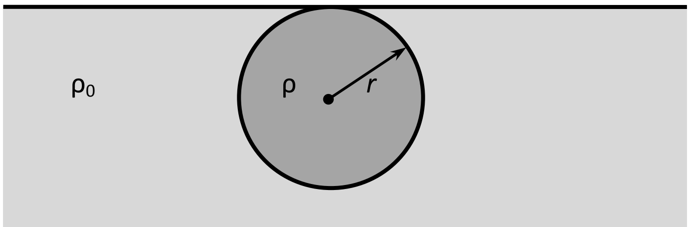
гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (3700 - 2300)} \approx 5000$ м.

**Ответ:** 5,0

**Вариант 4.3.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.
Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}01$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2700$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.



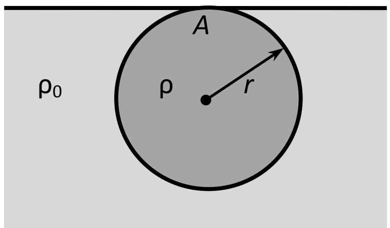

Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).

3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила



гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

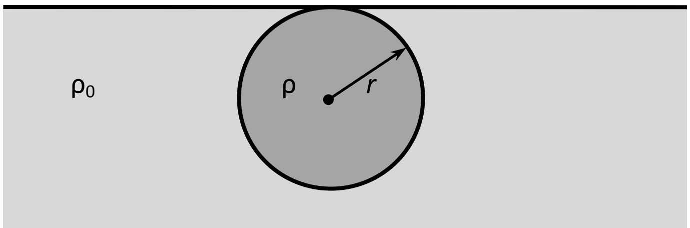
Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (4800 - 2700)} \approx 3300$ м.

**Ответ:** 3,3

**Вариант 4.4.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha$ = 0,01 % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2500$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.

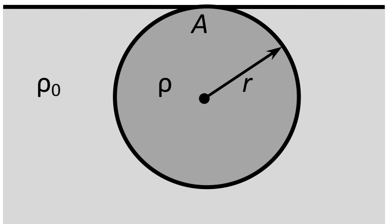



Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1 - \alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).




3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью $\rho$ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила

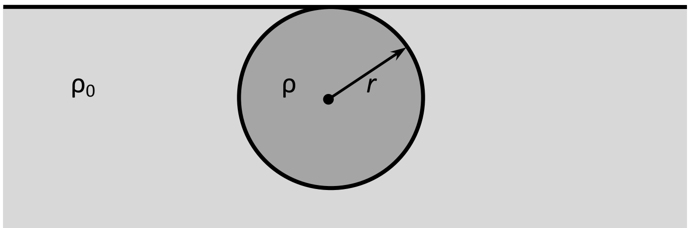
гравитационного притяжения со стороны шара плотностью $(\rho-\rho_0)$ и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3(\rho-\rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho-\rho_0)}{3g_0}r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho-\rho_0)}{3g_0}r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho-\rho_0)}\cdot\left[\frac{1}{(1-\alpha)^2}-1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2}-1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho-\rho_0)} = \frac{3\cdot 9{,}81\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3{,}14\cdot 6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot(3700-2500)} \approx 5800$ м.

**Ответ:** 5,8

**Вариант 4.5.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}005$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.




Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.

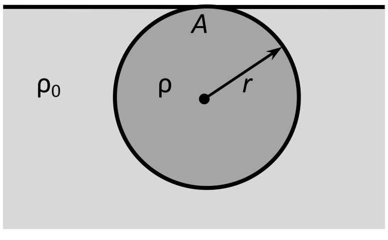
Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1-\alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).

3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила



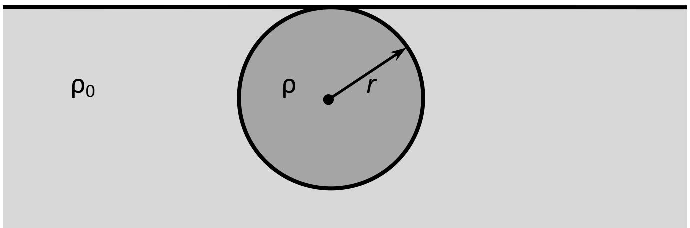
гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ($\rho - \rho_0$) и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (4800 - 2300)} \approx 1400$ м.

**Ответ:** 1,4

**Вариант 4.6.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.
Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на α = 0,005 % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2300$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.



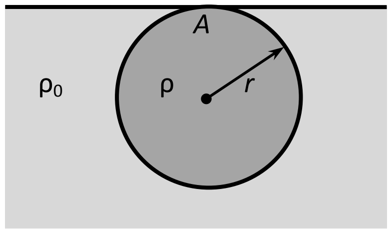

Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1 - \alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).

3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила

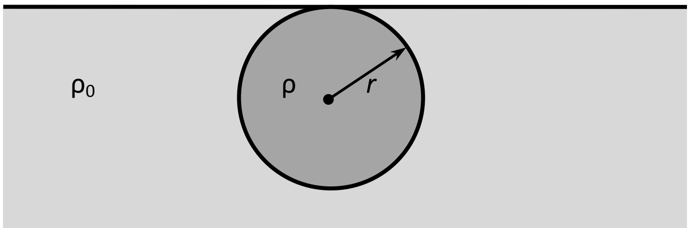


гравитационного притяжения со стороны шара плотностью $(\rho - \rho_0)$ и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (3700 - 2300)} \approx 2500$ м.

**Ответ:** 2,5

**Вариант 4.7.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.
Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на $\alpha = 0{,}005$ % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.



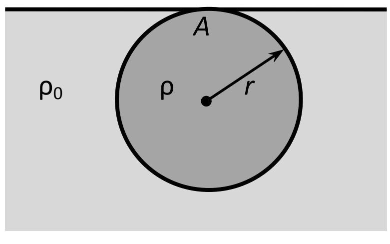

Средняя плотность рудного тела $\rho = 4800$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2700$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.

Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1 - \alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).




3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила гравитационного притяжения со стороны

шара плотностью (ρ – $\rho_0$) и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

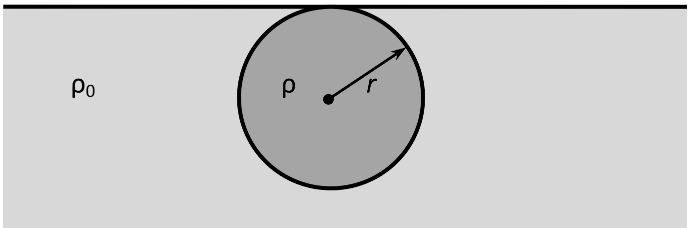
Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (4800 - 2700)} \approx 1700$ м.

**Ответ:** 1,7

**Вариант 4.8.** Полезные ископаемые, плотность которых заметно отличается от средней плотности земной коры, искажают гравитационное поле на поверхности Земли в окрестности их залегания. Исследование этих аномалий (гравиметрия) позволяет, в совокупности с другими методами разведки, оценить физические характеристики предполагаемого месторождения.

Измерения периода малых колебаний математического маятника у поверхности Земли над предполагаемым месторождением железной руды показали, что в некоторой точке он имеет минимальное значение, отличающееся на α = 0,005 % от его величины в удаленных от месторождения точках, где ускорение свободного падения имеет стандартное значение $g_0 = 9{,}81$ м/с$^2$. Оценить радиус $r$ месторождения, считая его однородным шаром, касающимся поверхности Земли (см. рис.). Ответ в километрах (км) округлить до десятых долей.

Средняя плотность рудного тела $\rho = 3700$ кг/м$^3$, средняя плотность вмещающих пород $\rho_0 = 2500$ кг/м$^3$, гравитационную постоянную принять равной $G = 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м$^2$/кг$^2$.

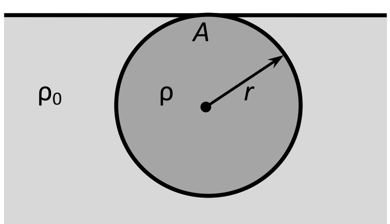



Однородный шар создает вне себя такое же гравитационное поле, какое создавала бы материальная точка, имеющая массу шара и расположенная там, где находится центр шара.

**Решение.**

1. Пусть $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g_0}}$ – период малых колебаний математического маятника вдали от месторождения, а $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ – минимальный период его малых колебаний. По условию задачи, $1 - \alpha = \dfrac{T}{T_0} = \sqrt{\dfrac{g_0}{g}}$, откуда $\dfrac{g}{g_0} = \dfrac{1}{(1-\alpha)^2}$.

2. Согласно формуле для периода малых колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, период колебаний маятника заданной длины минимален в точке, где ускорение свободного падения $g$ максимально. На поверхности Земли эта точка находится на вершине шара (точка $A$).




3. Сила тяжести $m\vec{g}$, действующая на тело массой $m$, помещенное в точку $A$, равна сумме силы гравитационного притяжения со стороны шара плотностью ρ и радиусом r, и силы гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, окружающих шар. Тот же результат получится, если считать, что на тело массой $m$ действуют сила

гравитационного притяжения со стороны шара плотностью (ρ – $\rho_0$) и радиусом $r$ и сила гравитационного притяжения со стороны вмещающих пород, но без выемки для шара. Тогда $mg = mg_0 + \frac{Gm}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 (\rho - \rho_0)$ и $\frac{g}{g_0} = 1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r$. Подставляя в последнее равенство выражение для $g/g_0$ из пункта 1, получаем для $r$ уравнение $1 + \frac{4\pi G(\rho - \rho_0)}{3g_0} r = \frac{1}{(1-\alpha)^2}$ с решением $r = \frac{3g_0}{4\pi G(\rho - \rho_0)} \cdot \left[\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1\right]$. Учитывая, что $\alpha << 1$, заменим выражение в квадратных скобках на более простое приближение: $\frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \cong 2\alpha$.

Тогда $r \cong \frac{3g_0\alpha}{2\pi G(\rho - \rho_0)} = \frac{3 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}7 \cdot 10^{-11} \cdot (3700 - 2500)} \approx 2900$ м.

**Ответ:** 2,9

**Тестовые задания для разминки 2-го тура:**

1. На какую максимальную глубину удалось исследовать Землю с помощью бурения?
***15 км***
*100 км*
*2 км*

2. Из каких трех основных частей состоит Земной шар?
*земная кора, литосфера, астеносфера*
***ядро, мантия, земная кора***
*ядро, литосфера, земная кора*

3. Какую часть объема Земного шара занимает мантия?
*1/10*
*1/2*
***5/6***

4. Какие температуры характерны для ядра Земли?
***$2000^0C$ - $5000^0C$***
*$500^0C$ - $700^0C$*
*$-70^0C$*

5. Что такое литосфера?
*верхняя часть земной коры*
***верхняя твердая оболочка Земли***
*нижняя часть земной коры*

6. Как различаются по толщине континентальная и океаническая кора?
***континентальная кора толще***
*океаническая кора толще*
*оба типа коры имеют одинаковую мощность*

7. Сколько основных слоев имеет континентальная кора?
*два: осадочный и базальтовый*
*один: гранитный*
***три: осадочный, гранитный и базальтовый***

8. Сколько основных слоев имеет океаническая кора?
***два: осадочный и базальтовый***
*один: гранитный*
*три: осадочный, гранитный и базальтовый*

9. В каком районе на поверхности Земли пробурена самая глубокая скважина?
***Кольский полуостров***
*полуостров Камчатка*
*Аппенинский полуостров*

10. У какого европейского государства 1/3 территории находится ниже уровня моря?
*Польша*
***<u>Нидерланды</u>***
*Финляндия*

11. Чем отличается щебень от гравия?
***<u>степенью окатанности обломочного материала</u>***
*размерами частиц*
*минеральным составом*

12. Где расположен вулкан Котопахи?
*Гавайские острова*
*Мексика*
***<u>Эквадор</u>***

13. Где расположен вулкан Орисаба?
*Гавайские острова*
***<u>Мексика</u>***
*Япония*

14. Где расположен вулкан Кракатау?
***<u>Индонезия</u>***
*Мексика*
*Гавайские острова*

15. Где расположен вулкан Гекла?
***<u>Исландия</u>***
*Италия*
*Мексика*

16. Где расположен вулкан Этна?
*остров Огненная Земля*
*остров Мадагаскар*
***<u>остров Сицилия</u>***

17. Назовите самую протяженную горную систему на Земле
***<u>Анды</u>***
*Уральские горы*
*Памир*

18. Назовите самую протяженную горную систему в России
***<u>Уральские горы</u>***
*Кавказ*
*Алтай*

19. К какому типу осадочных горных пород относится яшма?
*хемогенные осадочные горные породы*
*обломочные осадочные горные породы*
***кремнистые осадочные горные породы***

20. В каких горных породах под действием подземных вод часто образуются пещеры?
***известняки***
*песчаники*
*базальты*