МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ» по геологии

2014/2015 учебный год

http://olymp.msu.ru

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2014-2015 учебный год

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

Вариант 1.1. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.2 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 10 куб. м, в каждый последующий день на 0.5 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце шестого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано $a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [11.5;11.8].

Ответ: 12.

Вариант 1.2. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.1 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 10 куб. м, в каждый последующий день на 0.3 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце седьмого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [11.2;11.4].

Ответ: 11.

Вариант 1.3. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.3 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 12 куб. м, в каждый последующий день на 0.6 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце восьмого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) л. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [14.1;14.4].

Ответ: 14.

Вариант 1.4. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.2 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 8 куб. м, в каждый последующий день на 0.4 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце девятого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано $a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [9.6;9.8].

Ответ: 10.

Вариант 1.5. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.4 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 11 куб. м, в каждый последующий день на 0.6 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце десятого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) л. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [12.8;13].

Ответ: 13.

Вариант 1.6. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.1 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 5 куб. м, в каждый последующий день на 0.5 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце одиннадцатого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [9;9.4].

Ответ: 9.

Вариант 1.7. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.1 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 10 куб. м, в каждый последующий день на 0.6 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце двенадцатого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано $a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2 - d_1) + a_2, n_{\min}(d_2 - d_1) + a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим [15.5;16.0].

Ответ: 16.

Вариант 1.8. Потенциально перспективный водоносный горизонт представляет собой резервуар, содержащий некоторый объем воды. Пробная откачка из резервуара производилась через первую скважину в течение тридцати дней, в каждый последующий день на 0.2 куб. м больше чем в предыдущий. При этом для изучения коллекторских свойств резервуара через вторую скважину производилась закачка воды, в первый день 14 куб. м, в каждый последующий день на 0.3 куб. м больше чем в предыдущий. Замеры уровня воды в горизонте производились в конце каждого дня, в конце тринадцатого дня был зафиксирован минимальный уровень. Сколько могло быть откачано воды в первый день при данных условиях? Ответ в куб. м округлить до целых.

Решение.

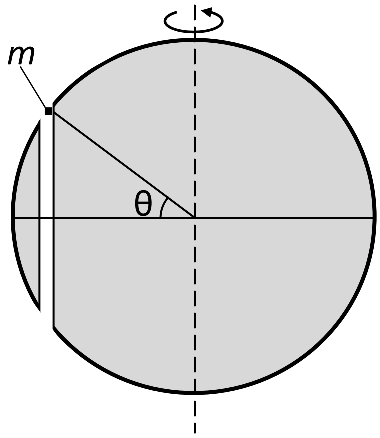
Пусть a_1 куб. м воды откачано в первый день, в n –й день откачано

$a_1 + d_1$(n-1) куб. м. Далее, пусть a_2 куб. м воды закачано в первый день, в n –й день закачано $a_2 + d_2$(n-1) куб. м. Тогда прирост объема воды за n –й день равен a+d(n-1), где $a = a_2 - a_1 < 0$, $d = d_2 - d_1 > 0$ по условию задачи. Суммарный прирост за n дней равен $\frac{d}{2}n(n-(1-2\frac{a}{d}))$. Данное выражение есть квадратичная функция относительно n, минимум ее достигается в точке $\frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d})$. Поскольку замеры производятся в конце каждого дня, то условие задачи, состоящее в том, что минимальный уровень воды достигается в конце дня с номером $n_{\min}$ выполнено в том и только в том случае, когда $n_{\min} - \frac{1}{2} \le \frac{1}{2}(1-2\frac{a}{d}) \le n_{\min} + \frac{1}{2}$. Решая полученное неравенство, получим $a_1 \in [(n_{\min}-1)(d_2-d_1)+a_2, n_{\min}(d_2-d_1)+a_2]$. Подставляя данные задачи в данное выражение, получим интервал [15.2;15.3].

Ответ: 15.

Задание 2

Вариант 2.1. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

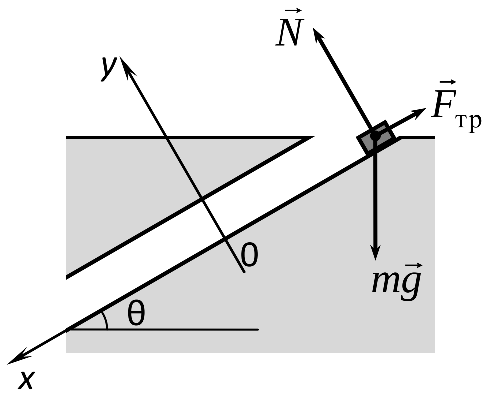


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}15$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta).$$

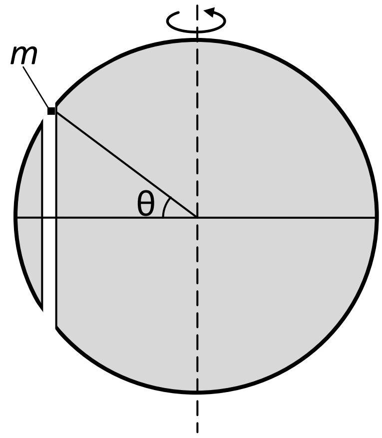
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \;\; \Rightarrow \;\; sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu,\; \theta > \theta_0 = arctg\,\mu \approx 8{,}5°$.

Ответ: 8,5.

Вариант 2.2. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

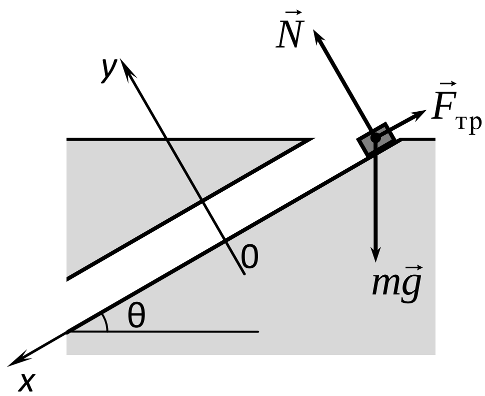


На дно тоннеля у его входа кладут брусок m. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}2$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось x направим вниз по дну тоннеля, а ось y – перпендикулярно оси x. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\,\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\,\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\,\theta - \mu\,cos\,\theta).$$

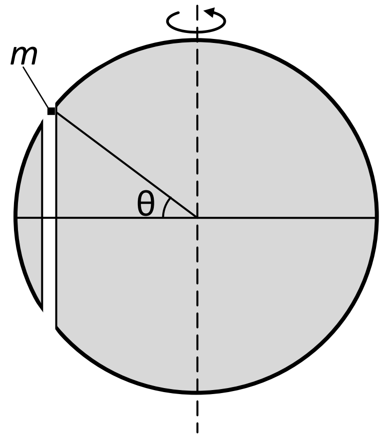
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$\sin\theta - \mu\cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta > \mu\cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu$, $\theta > \theta_0 = arctg\,\mu \approx 11{,}3°$.

Ответ: 11,3.

Вариант 2.3. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

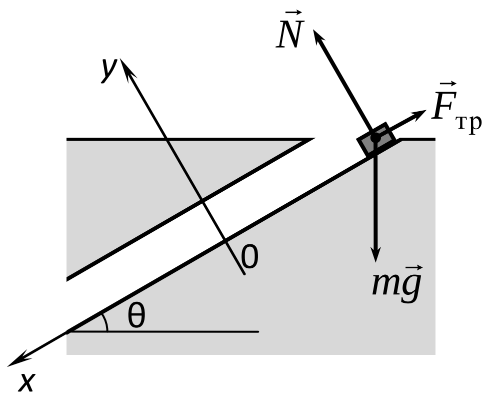


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}25$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\theta - F_{тр} = ma, \\ N - mg\,cos\theta = 0, \\ F_{тр} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\theta - \mu\,cos\theta).$$

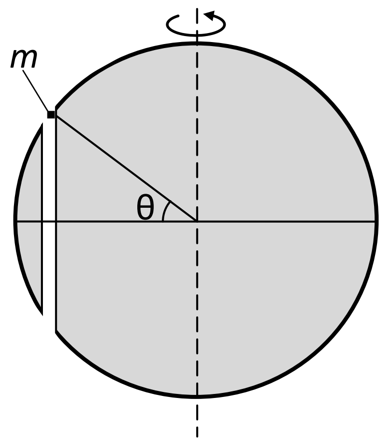
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$\sin\theta - \mu\cos\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta > \mu\cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu$, $\theta > \theta_0 = arctg\,\mu \approx 14{,}0°$.

Ответ: 14,0.

Вариант 2.4. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ.

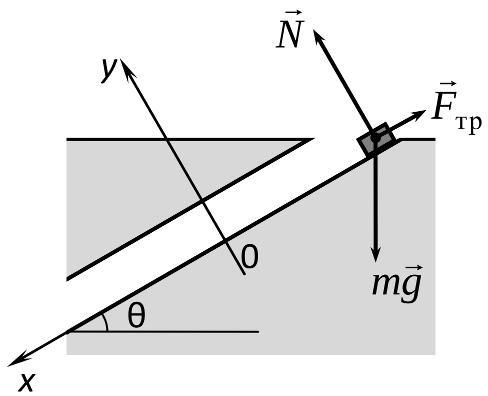


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. Коэффициент трения бруска по дну тоннеля $\mu = 0{,}3$. При каком минимальном значении широты θ брусок соскальзывает в тоннель, если его не удерживать? Ответ в градусах округлить до десятых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\theta - F_{тр} = ma, \\ N - mg\,cos\theta = 0, \\ F_{тр} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\theta - \mu\,cos\theta).$$

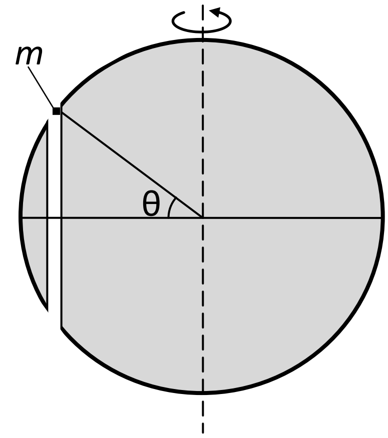
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \quad \Rightarrow \quad sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 \le \theta < 90°$, получим отсюда: $tg\theta > \mu,\ \theta > \theta_0 = arctg\ \mu \approx 16{,}7°$.

Ответ: 16,7.

Вариант 2.5. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 5° с.ш.

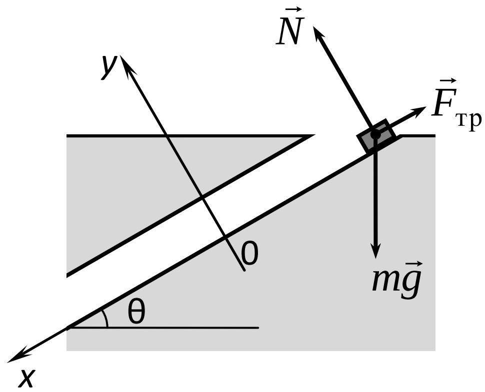


На дно тоннеля у его входа кладут брусок m. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось x направим вниз по дну тоннеля, а ось y – перпендикулярно оси x. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(\sin\theta - \mu\cos\theta).$$

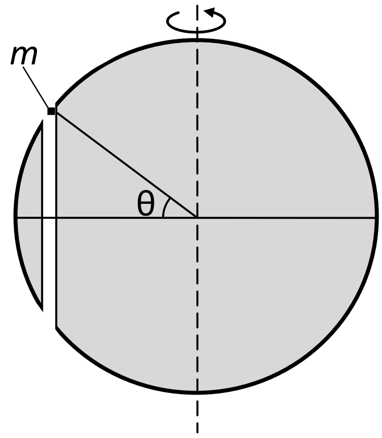
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$\sin\theta - \mu\cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta > \mu\cos\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}09$.

Ответ: 0,09.

Вариант 2.6. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 10° с.ш.

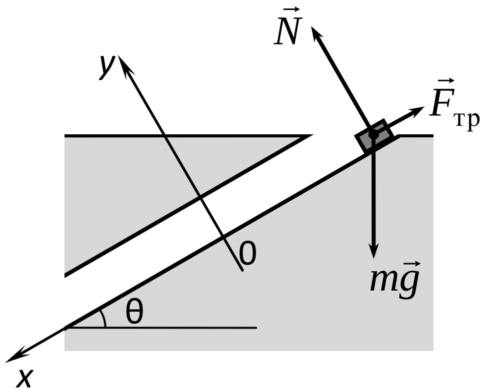


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\theta - F_{тр} = ma, \\ N - mg\,cos\theta = 0, \\ F_{тр} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\theta - \mu cos\theta).$$

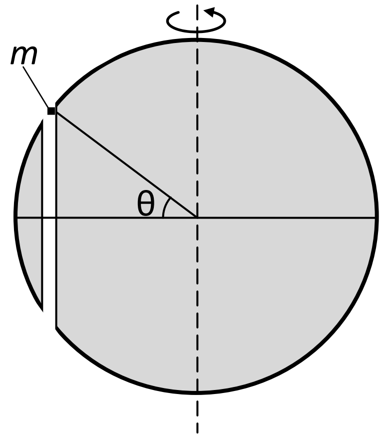
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}18$.

Ответ: 0,18.

Вариант 2.7. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 15° с.ш.

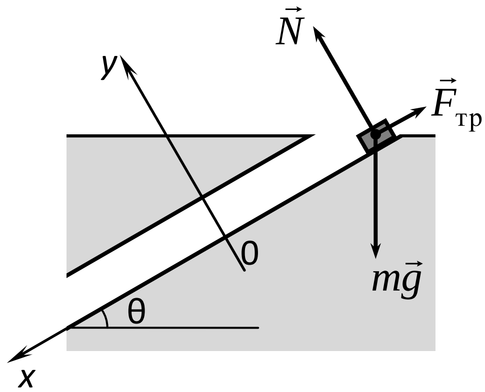


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\theta - \mu cos\theta).$$

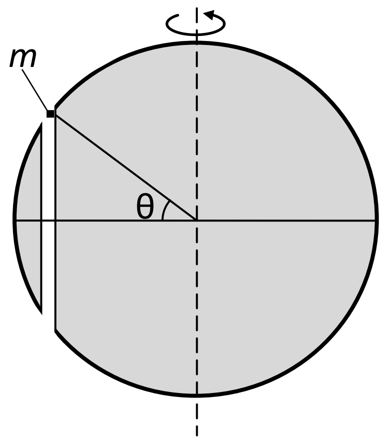
Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\theta - \mu cos\theta > 0 \;\Rightarrow\; sin\theta > \mu cos\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}27$.

Ответ: 0,27.

Вариант 2.8. Представьте себе тоннель прямоугольного сечения, пронизывающий Землю параллельно её оси вращения (см. рис.). Дно и потолок тоннеля перпендикулярны меридиональной плоскости, в которой лежит тоннель. Вход в тоннель находится на широте θ = 20° с.ш.

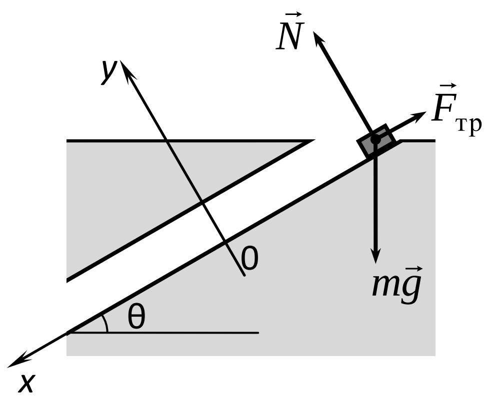


На дно тоннеля у его входа кладут брусок *m*. При каком значении коэффициента трения μ бруска по дну тоннеля брусок перестанет соскальзывать в тоннель, если его не удерживать? Ответ округлить до сотых.

Землю считать шаром со сферически симметричным распределением массы. Влиянием вращения Земли вокруг своей оси на движение бруска пренебречь.

Решение.

Направление силы тяжести (к центру Земли) считаем вертикальным. Тогда дно тоннеля представляет собой наклонную плоскость, которая образует угол θ с горизонтальной плоскостью. Систему отсчета, связанную с Землей, считаем инерциальной. Ось *x* направим вниз по дну тоннеля, а ось *y* – перпендикулярно оси *x*. На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленной вверх по касательной к наклонной плоскости (см. рисунок).



Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекциях на оси координат и выражение для модуля силы трения скольжения:

$$\begin{cases} mg\,sin\,\theta - F_{\text{тр}} = ma, \\ N - mg\,cos\,\theta = 0, \\ F_{\text{тр}} = \mu N. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем

$$a = g(sin\,\theta - \mu\,cos\,\theta).$$

Из условия задачи следует, что $a > 0$. Получаем неравенство

$$sin\,\theta - \mu\,cos\,\theta > 0 \;\Rightarrow\; sin\,\theta > \mu\,cos\,\theta.$$

Учитывая, что $0 < \theta < 90°$, получим отсюда: $\mu < tg\theta \approx 0{,}36$.

Ответ: 0,36.

Задание 3

Вариант 3.1. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.

Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y, $\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим: $BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин *BM:CM*=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.91.

Вариант 3.2. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.

Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 4:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда $CM=(1-k)a$ и искомое отношение объемов равно отношению длин $BM:CM$=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.85.

Вариант 3.3. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.

Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:4. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h=\frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t=\frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y=\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y=\frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM=\frac{\sin x}{\sin(x+y)}h=\frac{1}{2}a\cdot tgx\cdot\frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}=k\cdot a, k=\frac{1}{2}tgx\cdot\frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин *BM:CM*=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.87.

Вариант 3.4. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 7:10. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 30^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин *BM:CM*=k:(1-k). Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.88.

Вариант 3.5. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:
$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин C*M:BM*=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим
Ответ: 0.44.

Вариант 3.6. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.

Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 4:5. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)}h = \frac{1}{2}a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2}tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx+\sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин С*M:BM*=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.51.

Вариант 3.7. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.
Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 3:4. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.
Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2}a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,
$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:
$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)} h = \frac{1}{2} a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2} tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин C*M:BM*=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.49.

Вариант 3.8. При изучении морфологических свойств твердых пород их образцы подвергаются последовательной обработке, в процессе которой возникают хорошо знакомые фигуры. В данном задании рассматривается пример проблемы, возникающей в процессе обработки таких образцов.

Образец представляет собой правильную треугольную пирамиду SABC с основанием ABC, в которой отношение длины стороны основания к длине бокового ребра равно 7:10. Пирамида разрезается на две части, плоскость разреза должна проходить через боковое ребро SA под углом 45^0 к плоскости SAB. Чему будет равно отношение объема меньшей части к объему большей части пирамиды? Ответ дайте с точностью до 0.01.

Решение.

Пусть длина основания равна a, длина бокового ребра равна b, угол между плоскостью SAB и плоскостью разреза равен x. Рассмотрим точку N на прямой SA такую, что плоскость BCN перпендикулярна прямой SA. Если точка H-середина BC, то NH-общий перпендикуляр к прямым BC и AS. Пусть плоскость разреза пересекает плоскость BCN по прямой NM. В треугольнике BCN угол BNM по условию задачи равен x. Кроме того, отрезки BN и CN – высоты в равных треугольниках ABS и ACS соответственно. Треугольники ABS и ACS равнобедренные. Обозначив длины BN и CN через h, из формулы Герона для площади треугольника получим $h = \frac{1}{2} a\sqrt{4-t^2}, t = \frac{a}{b}$. В треугольнике BNC обозначим величины равных углов BCN и CBN через y,

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}, \sin y = \frac{\sqrt{3-t^2}}{\sqrt{4-t^2}}$. Далее, в треугольнике BNM по теореме синусов получим:

$BM = \frac{\sin x}{\sin(x+y)} h = \frac{1}{2} a \cdot tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}} = k \cdot a, k = \frac{1}{2} tgx \cdot \frac{4-t^2}{tgx + \sqrt{3-t^2}}$. Отсюда *CM=(1-k)a* и искомое отношение объемов равно отношению длин C*M:BM*=(1-k):k. Подставляя данные задачи, получим

Ответ: 0.47.

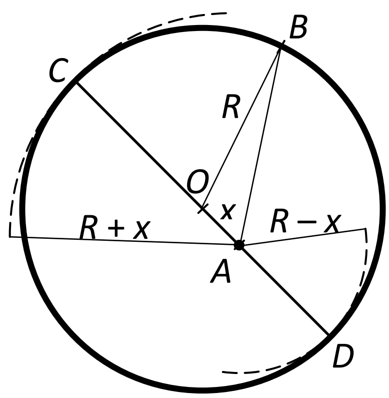
Задание 4

Вариант 4.1. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 6$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

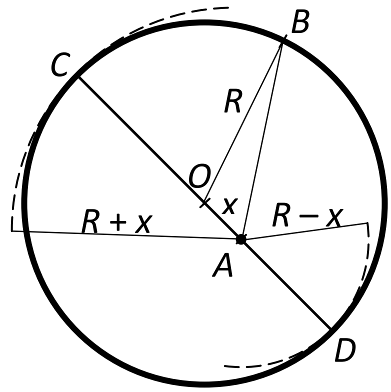
$R + x = (R - x)\sqrt{n}$ с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1} \approx 12{,}6$ см. **Ответ:** $x \approx 12{,}6$ см.

Вариант 4.2. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 6$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}+1} \approx 8{,}4$ см.

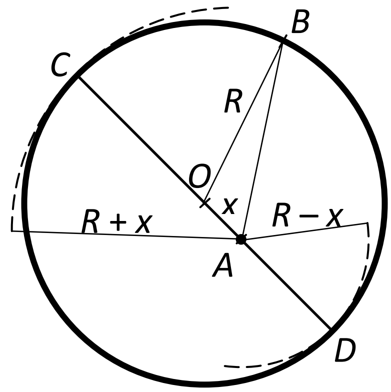
Ответ: $x \approx 8{,}4$ см.

Вариант 4.3. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 5$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \bigg/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} \approx 11{,}5$ см.

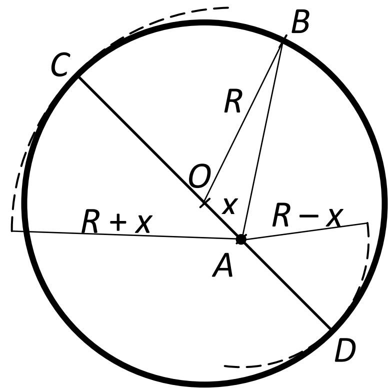
Ответ: $x \approx 11{,}5$ см.

Вариант 4.4. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 5$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx 7{,}6$ см.

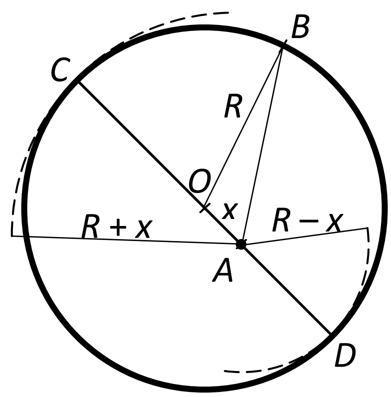
Ответ: $x \approx 7{,}6$ см.

Вариант 4.5. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 3$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \approx 8{,}0$ см.

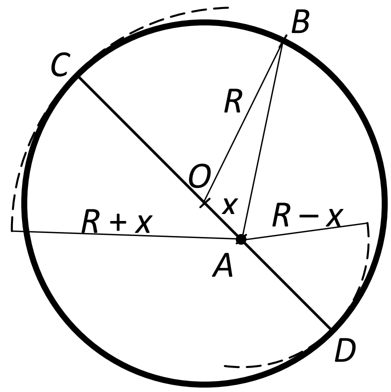
Ответ: $x \approx 8{,}0$ см.

Вариант 4.6. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 3$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \approx 5{,}4$ см.

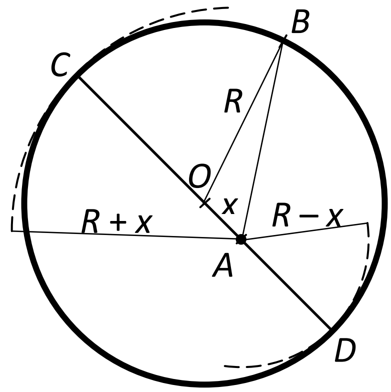
Ответ: $x \approx 5{,}4$ см.

Вариант 4.7. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 30$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 2$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x$, $R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 5{,}1$см.

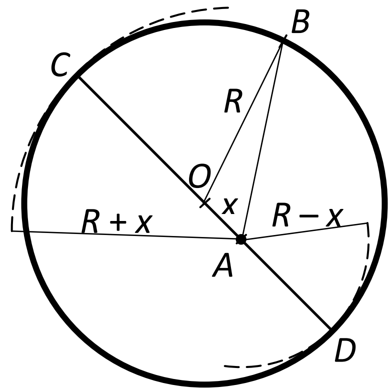
Ответ: $x \approx 5{,}1$ см.

Вариант 4.8. На границе рудных тел, находящихся в толще земли, часто возникают электрические заряды. Поэтому обнаружение и исследование аномалий электрического поля на поверхности Земли позволяет установить места залегания рудных тел.

Внутри полого тонкостенного глобуса радиусом $R = 20$ см находится неподвижный точечный заряд. На каком расстоянии x от центра глобуса находится заряд, если известно, что отношение максимального и минимального значений величины напряженности поля, создаваемого зарядом на поверхности глобуса, составляет $n = 2$? Ответ в см округлить до десятых. Считать, что оболочка глобуса не искажает электрического поля заряда.

Решение.

Пусть заряд q находится в точке A. Модуль напряженности его электростатического поля на расстоянии r от точки A равен $E = \frac{k|q|}{r^2}$. Поэтому максимум E на поверхности глобуса достигается в точке, ближайшей к точке A, а минимум E – в точке, наиболее удаленной от A. Рассмотрим произвольную точку B на поверхности глобуса. Через три точки: A, B и центр глобуса O, можно провести плоскость, которая пересечет поверхность глобуса по окружности радиусом R с центром в точке O. Точка B будет лежать на этой окружности (см. рисунок). В той же плоскости проведем две окружности с центром в точке A: первую радиусом $AC = R + x$, а вторую – радиусом $AD = R - x$. На рисунке видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки C, лежат ближе к точке A, чем точка C. Аналогично видно, что все точки поверхности глобуса, кроме точки D, лежат дальше от точки A, чем точка D. Таким образом, на поверхности глобуса точка D – ближайшая к A, а точка C – наиболее удаленная от A.



Тогда, в соответствии с условием задачи,

$$n = \frac{max\,E}{min\,E} = \frac{E(D)}{E(C)} = \left[\frac{k|q|}{(R-x)^2}\right] \Big/ \left[\frac{k|q|}{(R+x)^2}\right] = \frac{(R+x)^2}{(R-x)^2}.$$

Поскольку расстояния $R - x,\ R + x$ положительны, отсюда получаем уравнение

$$R + x = (R - x)\sqrt{n}$$

с решением $x = R\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$. Подставляя числа, получим $x = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \approx 3{,}4$ см.

Ответ: $x \approx 3{,}4$ см.

Тестовые задания для разминки 1-го тура:

1. Какая горная порода относится к классу магматических горных пород?
<u>гранит</u>
песчаник
известняк
мрамор

2. Какая горная порода относится к классу осадочных горных пород?
гранит
базальт
<u>известняк</u>
мрамор

3. Какая горная порода относится к классу метаморфических горных пород?
гранит
песчаник
известняк
<u>мрамор</u>

4. Из какой горной породы образуется мрамор?
глина
<u>известняк</u>
песчаник
гранит

5. Из какой горной породы образуется кварцит?
глина
известняк
<u>песчаник</u>
гранит

6. Из какой горной породы образуется аргиллит?
<u>глина</u>
известняк
песчаник
гранит

7. Из какой горной породы образуется гнейс?
глина
известняк
песчаник
<u>гранит</u>

8. Какая горная порода относится к хемогенным осадочным горным породам?
гранит

известняк
песчаник
<u>каменная соль</u>

9. Какая горная порода относится к органогенным осадочным горным породам?
гранит
<u>известняк</u>
песчаник
каменная соль

10. Какая горная порода относится к терригенным осадочным горным породам?
гранит
известняк
<u>песчаник</u>
каменная соль

11. Какая горная порода образовалась при застывании магмы в недрах Земной коры?
базальт
<u>гранит</u>
известняк
песчаник

12. Какая горная порода образовалась при застывании лавы на поверхности Земли?
<u>базальт</u>
гранит
известняк
песчаник

13. Какой минерал входит в состав гранита?
<u>кварц</u>
пирит
малахит
галит

14. Какого цвета базальт?
желтый
<u>темно-серый</u>
белый
красно-коричневый

15. Что является горной породой?
пирит
кварц
<u>гранит</u>
полевой шпат

16. Что является минералом?

гранит

базальт

известняк

пирит

17. Какой минерал наши предки вставляли в окна вместо стекла?

мусковит

каолинит

чароит

серпентинит

18. Какой минерал можно употреблять в пищу?

мусковит

каолинит

галит

серпентинит

19. Из какого минерала древние люди делали наконечники для копий и стрел?

галит

пирит

мусковит

обсидиан

20. Как называется процесс разрушения горной породы на поверхности Земли?

выветривание

магматизм

метаморфизм

вулканизм