ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2013/2014 учебный год

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

2014 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ
Заключительный этап
Вариант 1.

Задание 1.

Химический состав воды в грунтах дает важные сведения о геологической истории вмещающих пород. Если поверхность грунтовых вод залегает вблизи земной поверхности, грунтовые воды испаряются в атмосферу, в результате чего меняется химический состав воды. В данной задаче рассматривается пример изменения структуры воды в некотором подземном объеме.

В исследуемом объеме грунта, расположенном под поверхностью земли и содержащем 0.6 куб. м. воды, изначально установлено, что в этой воде содержится 2% калиевой соли. В результате испарения влажность грунта в этом объеме уменьшилась. Повторный анализ состава воды показал, что концентрация соли стала не менее 2.5%. Сколько воды испарилось в данном объеме?

Решение. Пусть из объема V куб. м. испаряется a куб. м. воды, тогда если начальная концентрация соли k_1, то концентрация соли после испарения

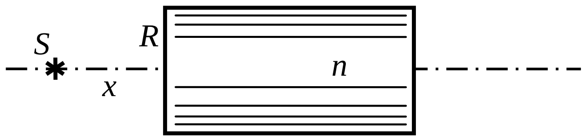
$$\frac{k_1 V}{V-a} \geq p \Leftrightarrow a \geq V\left(1-\frac{k_1}{p}\right).$$

Подставляя значения k_1=0.02, V=0.6, p=0.025, получим $a \geq 0.12$.

Ответ: [0.12;0.6) куб. м.

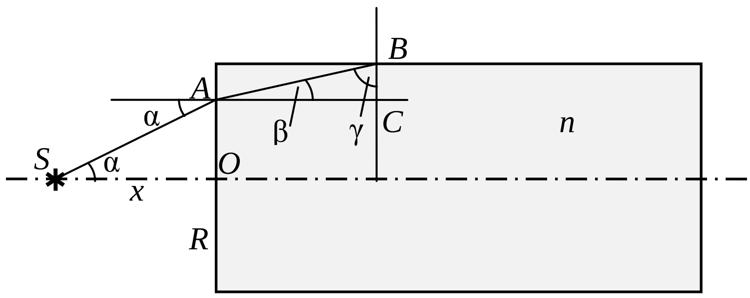
Задание 2.

Точечный источник S монохроматического света находится на оси цилиндра радиусом R, вырезанного из прозрачного кристалла с показателем преломления n = 1,37, на расстоянии x = 10 мм от ближайшего к нему основания цилиндра (см. рисунок). Найдите максимальное значение R, при котором весь свет от источника, падающий на это основание, распространяется в цилиндре, не выходя наружу через его боковую поверхность.



Решение.

Обозначим угол падения луча на торец цилиндра через α.



$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{OA}{x}$.

$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$, отсюда $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n}$.

В треугольнике ΔABC угол $\angle C = 90°$, отрезок AC является по построению нормалью к левому торцу цилиндра, а отрезок BC – нормалью к боковой поверхности цилиндра. Поэтому $\gamma = 90° - \beta$.

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, угол падения γ должен быть достаточно велик, а именно, он должен превосходить предельный угол полного внутреннего отражения $\gamma_{\text{пр}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Нам по условию задачи требуется, чтобы даже наименьшее значение γ превосходило величину $\gamma_{\text{пр}}$. Поскольку $\gamma = 90° - \beta$, минимальное значение γ достигается при максимуме β.

Далее, из формулы $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$ следует, что максимум β достигается при максимуме α. Но $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{OA}{x}$, поэтому при заданном x максимум α достигается при максимальном значении OA, равном, очевидно, R.

Таким образом, наименьшее значение γ при заданном x достигается, если $OA = R$, то есть когда луч SA попадает в самый край торца цилиндра.

Пусть $OA = R$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{x}$,

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{R}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{R}{n\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\gamma = \sin(90^\circ-\beta) = \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{R^2}{n^2(R^2+x^2)}}.$$

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, даже для наименьшего угла γ должно выполняться неравенство: $\gamma > \gamma_{\text{пр}}$ или $\sin\gamma > \sin\gamma_{\text{пр}}$. Из определения $\gamma_{\text{пр}}$ следует, что $\sin\gamma_{\text{пр}} = \dfrac{1}{n}$.

Подставим эти результаты в неравенство $\sin\gamma > \sin\gamma_{\text{пр}}$, и оно приобретет вид:

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{n^2(R^2+x^2)}} > \frac{1}{n}.$$

Поскольку $n > 1$, выражение под корнем положительно при $R > 0$ и любых x, и неравенство имеет смысл.

Отсюда:

$$1-\frac{R^2}{n^2(R^2+x^2)} > \frac{1}{n^2}\text{ , или } 1 > \frac{1}{n^2}\left[1+\frac{R^2}{R^2+x^2}\right].$$

$$n^2 > 1+\frac{R^2}{R^2+x^2},\quad n^2-1 > \frac{R^2}{R^2+x^2},$$
$$(R^2+x^2)(n^2-1) > R^2,$$
$$x^2(n^2-1) > R^2\left[1-(n^2-1)\right] = R^2(2-n^2).$$

Т.к. $1 < n < \sqrt{2}$, то $R^2 < x^2\cdot\dfrac{n^2-1}{2-n^2}$.

Т.о. $R < x\sqrt{\dfrac{n^2-1}{2-n^2}} = R_{\text{макс}}$.

$$R_{\text{макс}} = x\sqrt{\frac{n^2-1}{2-n^2}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}37^2-1}{2-1{,}37^2}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}8769-1}{2-1{,}8769}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{0{,}8769}{0{,}1231}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\frac{8769}{1231}} \approx$$
≈ 27 мм.

Ответ: $R_{\text{макс}} = x\sqrt{\dfrac{n^2-1}{2-n^2}} = 10\text{ мм}\cdot\sqrt{\dfrac{8769}{1231}} \approx 27$ мм.

Задание 3.

Оценка скорости остывания вулканической магмы в различных условиях является важной задачей с точки зрения установления закономерностей динамики структуры земли и как следствие развития технологий разведки полезных ископаемых. В данной задаче рассматривается пример зависимости температуры магмы от расстояния до центра очага.

Магматический очаг окружен горными породами, в которых температура существенно ниже чем в самом узле. Если в магме расстояние от центра очага обозначить через *s*, то температура *t(s)* (в градусах по Цельсию) в соответствующей точке в магме подчиняется закону

$$t(s+1) = t(s) - 2 - \frac{1}{5}s\text{, s=0,1,2,3,}\ldots.$$

Чему равна величина *t(0),* если *t(*100*)*=400?

Решение. Суммируя равенства $t(s+1) = t(s) - 2 - \frac{1}{5}s$ по s от 0 до 99, получим

$$t(100) = t(0) - 2\cdot 100 - \frac{1}{5}\cdot(1+2+3+...+99) = t(0) - 200 - \frac{1}{5}\cdot\frac{1+99}{2}\cdot 99 = t(0) - 200 - 990,$$

откуда *t(0)*= *t(*100*)*+1190=1590.

Ответ: 1590 градусов.

Задание 4.

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит, в основном, из метана, но содержат также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Часто он содержит также значительную примесь сернистого водорода – ядовитого газа, от которого добываемый природный газ необходимо очищать. Вместе с тем, сернистый водород является важным сырьем для химической промышленности.

Доля сернистого водорода, содержащегося в природном газе, добываемом на газовом месторождении, составляет α = 3 % от общего количества вещества добытого газа. Какой объем *V* природного газа (рассчитанный для нормальных условий: температуры t = 0 °C и атмосферного давления p_0 = 0,1 МПа) добывается на данном месторождении за год, если ежесуточно путем глубокой очистки добываемого газа удается получить объем V_1 = 13 м^3 сжиженного сернистого водорода? Молярная масса сернистого водорода равна μ = 34 г/моль, плотность жидкого сернистого водорода ρ = 950 кг/м^3. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(К·моль).

Решение.

Масса *m* сернистого водорода, добываемую на месторождении ежесуточно:

$$m = \rho V_1.$$

Количество вещества сернистого водорода, соответствующее массе *m*:

$$\nu_1 = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V_1}{\mu},$$

где μ – молярная масса сернистого водорода.

Количество вещества ν_2 сернистого водорода, добываемое на месторождении за год:

$$\nu_2 = N\nu_1 = \frac{N\rho V_1}{\mu},$$

где N = 365 – число календарных дней в году.

Количество вещества ν природного газа, добываемого на месторождении за год:

$$\nu = \frac{\nu_2}{\alpha} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu}.$$

Объем *V* природного газа, добываемого на месторождении за год, рассматривается при нормальных условиях (p_0 = 0,1 МПа и t = 0 °C, т.е. абсолютная температура T = 273 К). В этом случае газ можно считать близким к идеальному и использовать для его описания уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$V=\frac{\nu RT}{p_0}=\frac{N\rho V_1}{\alpha\mu}\cdot\frac{RT}{p_0}.$$

$$V=\frac{365\cdot950\cdot13\cdot8{,}31\cdot273}{0{,}03\cdot34\cdot10^{-3}\cdot10^5}=\frac{3{,}65\cdot0{,}95\cdot13\cdot8{,}31\cdot2{,}73}{102}\cdot10^7\approx10^8\,\text{м}^3.$$

Ответ: $V=\dfrac{N\rho V_1}{\alpha\mu}\cdot\dfrac{RT}{p_0}\approx10^8$ м^3.

Задание 5.

Изучение полиэдрических структур кристаллов является перспективным направлением в области нанотехнологий. Приведенная ниже задача рассматривает один специальный вид полиэдра, т.е. многогранника.

Многогранник представляет собой соединение призмы с пирамидой. Основаниями прямой призмы являются правильные треугольники *ABE* и *DCF* с длиной стороны равной 3, боковая сторона призмы равна 4. Боковая грань *ABCD* призмы является основанием пирамиды *SABCD*, вершина *S* и ребро *EF* находятся по разные стороны от плоскости *ABCD*, боковые ребра пирамиды равны 5. Построенный многогранник *SABCDEF* называется семивершинником. Точка *P* находится на диагонали *AC* прямоугольника *ABCD*, при этом $\dfrac{AP}{PC}=\dfrac{1}{3}$. Прямая, проходящая через точки *S* и *P*, пересекает границу семивершинника в точке *X*. Найдите площадь сечения семивершинника плоскостью, содержащей прямые *SP* и *SO*, где *O* – центр боковой грани *ABCD*. Чему равна длина отрезка *SX*?

Решение. Пусть *a* – сторона основания призмы, *b* – боковое ребро, *c* – боковое ребро пирамиды *SABCD.* Пусть далее точка *H* – середина отрезка *EF*, прямая *SH* перпендикулярна плоскости *ABCD*. Искомое сечение – четырехугольник *ASCH,* площадь которого равна сумме площадей *ASC* и *ACH*.

$$AC=\sqrt{a^2+b^2};SO=\sqrt{c^2-(a^2+b^2)/4}\Rightarrow S_{\Delta ASC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2-(a^2+b^2)/4}.$$

В треугольнике *ACH:* $OH=a\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow S_{\Delta ACH}=\dfrac{1}{4}\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot a\sqrt{3}$. Подставляя значения a=3, b=4, c=5, получаем $S_{\Delta ASC}=\dfrac{25}{4}\sqrt{3},S_{\Delta ACH}=\dfrac{15}{4}\sqrt{3}\Rightarrow S_{ASCH}=10\sqrt{3}$.

Точка *X* – точка пересечения прямых *SP* и *AH*. Обозначим угол *OSP* через α, а угол *SHX* через β. Тогда в треугольнике *SHX* сторона $SH=OH+OS=\dfrac{a\sqrt{3}+\sqrt{4c^2-a^2-b^2}}{2}=4\sqrt{3}$.

Кроме того,

$$tg\alpha=OP/OS=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{4c^2-a^2-b^2}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{13}},\cos\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

Аналогично $tg\beta=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a\sqrt{3}}=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\beta=\dfrac{5}{2\sqrt{13}},\cos\beta=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$.

По теореме синусов в треугольнике *SHX*:

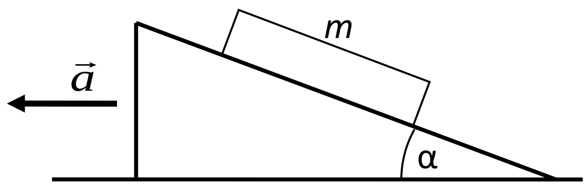
$$\frac{SX}{\sin\beta}=\frac{SH}{\sin(\alpha+\beta)}\Leftrightarrow SX=4\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{20}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $10\sqrt{3}$; $\dfrac{20\sqrt{13}}{13}$.

Задание 6.

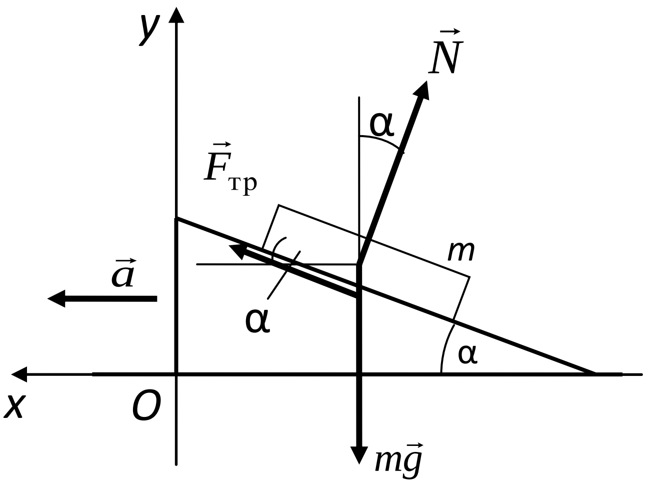
При землетрясениях происходит движение точек земной поверхности, до которых дошла сейсмическая волна. Характер разрушений, вызываемых сейсмической волной, сильно зависит от того, сопровождается ли это движение значительными деформациями земной поверхности, или нет. Представление о последствиях прохождения сейсмической волны без значительных деформаций земной поверхности можно получить, решая следующую задачу.

Брусок m покоится на наклонном плоском недеформируемом основании, составляющем угол α с горизонтом. Коэффициент трения между бруском и наклонным основанием μ = 0,5. Основание движется поступательно с постоянным горизонтальным ускорением $\vec{a}$, как показано на рисунке. Максимальное значение модуля ускорения $\vec{a}$, при котором брусок сохраняет свое состояние покоя относительно основания при движении последнего, равно a = 0,8 м/с^2. Найдите α (в ответе достаточно указать численное значение sin α, cos α или tg α). Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.



Решение.

На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной по касательной к наклонной плоскости.



Согласно 2-му закону Ньютона, сумма приложенных к телу сил вызывает его ускорение: $\vec{F} = m\vec{a}$. Ускорение бруска равно ускорению основания и поэтому направлено влево (см. рисунок). Значит, равнодействующая приложенных к бруску сил тоже направлена влево. Но сила $m\vec{g}$ вертикальна, а сила $\vec{N}$ направлено вверх-вправо. Поэтому сила трения должна быть направлена вдоль наклонной плоскости вверх-влево.

Сила трения в данной задаче является силой трения покоя, ее модуль связан с модулем нормальной составляющей силы реакции опоры неравенством $F_{тр} \le \mu N$, где μ – коэффициент трения. В случае максимального ускорения модуль силы трения тоже максимален и выражается равенством $F_{тр} = \mu N$.

$$\begin{cases} F_{тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ F_{тр}\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 \\ F_{тр} = \mu N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu N\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ \mu N\sin\alpha + N\cos\alpha = mg \end{cases}$$

$$\frac{ma}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha},$$

$$a_{\text{макс}} = g\,\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = g\,\frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

$$a\cdot(\mu\operatorname{tg}\alpha + 1) = g\cdot(\mu - \operatorname{tg}\alpha).$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a} = \frac{0{,}5\cdot 10 - 0{,}8}{10 + 0{,}5\cdot 0{,}8} = \frac{4{,}2}{10{,}4} = \frac{21}{52} \approx 0{,}4.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a} = \frac{21}{52} \approx 0{,}4$, или $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu g - a}{g + \mu a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{21}{52}\right) \approx \operatorname{arctg} 0{,}4$.

2014 г.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по ГЕОЛОГИИ
Заключительный этап
Вариант 2.

Задание 1.

Химический состав воды в грунтах дает важные сведения о геологической истории вмещающих пород. Если поверхность грунтовых вод залегает вблизи земной поверхности, грунтовые воды испаряются в атмосферу, в результате чего меняется химический состав воды. В данной задаче рассматривается пример изменения структуры воды в некотором подземном объеме.

В исследуемом объеме грунта, расположенном под поверхностью земли и содержащем 0.8 куб. м. воды, изначально установлено, что в этой воде содержится 1.5% калиевой соли. В результате испарения влажность грунта в этом объеме уменьшилась. Повторный анализ состава воды показал, что концентрация соли стала не менее 2%. Сколько воды испарилось в данном объеме?

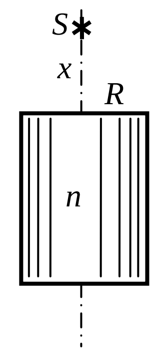
Решение. Пусть из объема V куб. м. испаряется a куб. м. воды, тогда если начальная концентрация соли k_1, то концентрация соли после испарения

$$\frac{k_1 V}{V-a} \geq p \Leftrightarrow a \geq V(1-\frac{k_1}{p}).$$

Подставляя значения k_1=0.015, V=0.8, p=0.02, получим $a \geq 0.2$.

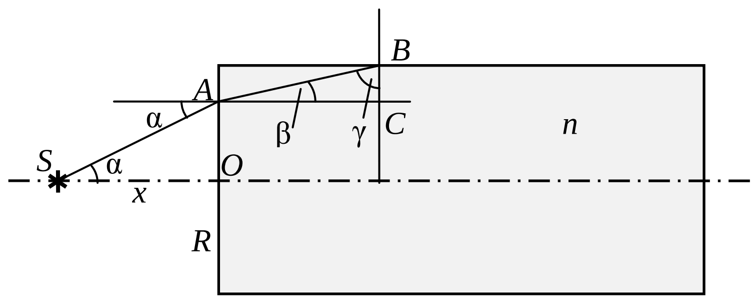
Ответ: [0.2;0.8) (куб. м.)

Задание 2. Точечный источник S монохроматического света находится на оси цилиндра радиусом R, вырезанного из прозрачного кристалла с показателем преломления $n = 1{,}39$, на расстоянии x = 8 мм от ближайшего к нему основания цилиндра (см. рисунок). Найдите максимальное значение R, при котором весь свет от источника, падающий на это основание, распространяется в цилиндре, не выходя наружу через его боковую поверхность.



Решение.

Обозначим угол падения луча на торец цилиндра через α.



$$\alpha = \mathrm{arctg}\frac{OA}{x}.$$

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$$

отсюда $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$.

В треугольнике ΔABC угол $\angle C = 90°$, отрезок AC является по построению нормалью к левому торцу цилиндра, а отрезок BC – нормалью к боковой поверхности цилиндра. Поэтому $\gamma = 90° - \beta$.

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, угол падения γ должен быть достаточно велик, а именно, он должен превосходить предельный угол полного внутреннего отражения $\gamma_{\text{пр}} = \arcsin\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Нам по условию задачи требуется, чтобы даже наименьшее значение γ превосходило величину $\gamma_{\text{пр}}$. Поскольку $\gamma = 90° - \beta$, минимальное значение γ достигается при максимуме β.

Далее, из формулы $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha}{n}$ следует, что максимум β достигается при максимуме α. Но $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{OA}{x}$, поэтому при заданном x максимум α достигается при максимальном значении OA, равном, очевидно, R.

Таким образом, наименьшее значение γ при заданном x достигается, если $OA = R$, то есть когда луч SA попадает в самый край торца цилиндра.

Пусть $OA = R$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{R}{x}$,

$$\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\frac{R}{x}}{\sqrt{1+\left(\frac{R}{x}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{R}{n\sqrt{R^2+x^2}},$$

$$\sin\gamma = \sin\left(90^\circ - \beta\right) = \cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)}}.$$

Чтобы в точке B луч AB не выходил из кристалла наружу, даже для наименьшего угла γ должно выполняться неравенство: $\gamma > \gamma_{пр}$ или $\sin\gamma > \sin\gamma_{пр}$. Из определения $\gamma_{пр}$ следует, что $\sin\gamma_{пр} = \dfrac{1}{n}$.

Подставим эти результаты в неравенство $\sin\gamma > \sin\gamma_{пр}$, и оно приобретет вид:

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)}} > \frac{1}{n}.$$

Поскольку $n > 1$, выражение под корнем положительно при $R > 0$ и любых x, и неравенство <u>имеет смысл</u>.

Отсюда:

$$1-\frac{R^2}{n^2\left(R^2+x^2\right)} > \frac{1}{n^2}, \text{ или } 1 > \frac{1}{n^2}\left[1+\frac{R^2}{R^2+x^2}\right].$$

$$n^2 > 1+\frac{R^2}{R^2+x^2},$$

$$n^2 - 1 > \frac{R^2}{R^2+x^2},$$

$$\left(R^2+x^2\right)\left(n^2-1\right) > R^2,$$

$$x^2\left(n^2-1\right) > R^2\left[1-\left(n^2-1\right)\right] = R^2\left(2-n^2\right).$$

Т.к. $1 < n < \sqrt{2}$, то $R^2 < x^2 \cdot \dfrac{n^2-1}{2-n^2}$.

Т.о. $R < x\sqrt{\dfrac{n^2-1}{2-n^2}} = R_{макс}$.

$$R_{\text{макс}} = x\sqrt{\frac{n^2-1}{2-n^2}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}39^2-1}{2-1{,}39^2}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{1{,}9321-1}{2-1{,}9321}} =$$

$$= 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{0{,}9321}{0{,}0679}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{9321}{679}} \approx 30\,\text{мм}.$$

Ответ: $R_{\text{макс}} = x\sqrt{\frac{n^2-1}{2-n^2}} = 8\,\text{мм}\cdot\sqrt{\frac{9321}{679}} \approx 30\,\text{мм}.$

Задание 3.

Оценка скорости остывания вулканической магмы в различных условиях является важной задачей с точки зрения установления закономерностей динамики структуры земли и как следствие развития технологий разведки полезных ископаемых. В данной задаче рассматривается пример зависимости температуры магмы от расстояния до центра очага.

Магматический очаг окружен горными породами, в которых температура существенно ниже чем в самом узле. Если в магме расстояние от центра очага обозначить через *s*, то температура *t(s)* (в градусах по Цельсию) в соответствующей точке в магме подчиняется закону

$$t(s+1) = t(s) - 1 - \frac{1}{10}s\text{, s=0,1,2,3,}\ldots$$

Чему равна величина *t(0)*, если *t(*100*)=5*00?

Решение. Суммируя равенства $t(s+1) = t(s) - 1 - \frac{1}{10}s$ по s от 0 до 99, получим

$$t(100) = t(0) - 100 - \frac{1}{10}\cdot(1+2+3+...+99) = t(0) - 100 - \frac{1}{10}\cdot\frac{1+99}{2}\cdot 99 = t(0) - 100 - 495,$$

откуда *t(0)= t(*100*)+5*95*=10*95.

Ответ: 1095 градусов.

Задание 4.

Природный горючий газ, добываемый на газовых месторождениях, состоит, в основном, из метана, но содержат также этан, пропан, бутан и другие углеводороды. Часто он содержит также значительную примесь сернистого водорода – ядовитого газа, от которого добываемый природный газ необходимо очищать. Вместе с тем, сернистый водород является важным сырьем для химической промышленности.

Доля сернистого водорода, содержащегося в природном газе, добываемом на газовом месторождении, составляет α = 5 % от общего количества вещества добытого газа. Какой объем *V* природного газа (рассчитанный для нормальных условий: температуры t = 0 $^\circ$C и атмосферного давления p_0 = 0,1 МПа) добывается на данном месторождении за год, если ежесуточно путем глубокой очистки добываемого газа удается получить объем V_1 = 2 м^3 сжиженного сернистого водорода? Молярная масса сернистого водорода равна μ = 34 г/моль, плотность жидкого сернистого водорода ρ = 950 кг/м^3. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(К·моль).

Решение.

Масса *m* сернистого водорода, добываемую на месторождении ежесуточно:

$$m = \rho V_1.$$

Количество вещества сернистого водорода, соответствующее массе *m*:

$$\nu_1 = \frac{m}{\mu} = \frac{\rho V_1}{\mu},$$

где μ – молярная масса сернистого водорода.

Количество вещества ν_2 сернистого водорода, добываемое на месторождении за год:

$$\nu_2 = N\nu_1 = \frac{N\rho V_1}{\mu},$$

где N = 365 – число календарных дней в году.

Количество вещества ν природного газа, добываемого на месторождении за год:

$$\nu = \frac{\nu_2}{\alpha} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu}.$$

Объем V природного газа, добываемого на месторождении за год, рассматривается при нормальных условиях (p_0 = 0,1 МПа и t = 0 $^\circ$С, т.е. абсолютная температура T = 273 К). В этом случае газ можно считать близким к идеальному и использовать для его описания уравнение Клапейрона–Менделеева:

$$V = \frac{\nu RT}{p_0} = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu} \cdot \frac{RT}{p_0}.$$

$$V = \frac{365 \cdot 950 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 273}{0{,}05 \cdot 34 \cdot 10^{-3} \cdot 10^5} = \frac{3{,}65 \cdot 0{,}95 \cdot 2 \cdot 8{,}31 \cdot 2{,}73}{170} \cdot 10^7 \approx 9{,}3 \cdot 10^6 \text{ м}^3.$$

Ответ: $V = \frac{N\rho V_1}{\alpha\mu} \cdot \frac{RT}{p_0} \approx 9{,}3 \cdot 10^6$ м^3.

Задание 5.

Изучение полиэдрических структур кристаллов является перспективным направлением в области нанотехнологий. Приведенная ниже задача рассматривает один специальный вид полиэдра, т.е. многогранника.

Многогранник представляет собой соединение призмы с пирамидой. Основаниями прямой призмы являются правильные треугольники ABE и DCF с длиной стороны равной 1, боковое ребро призмы равно 2. Боковая грань $ABCD$ призмы является основанием пирамиды $SABCD$, вершина S и ребро EF находятся по разные стороны от плоскости $ABCD$, боковые ребра пирамиды равны $\frac{3}{2}$. Построенный многогранник $SABCDEF$ называется семивершинником. Точка P находится на диагонали AC прямоугольника $ABCD$, при этом $\frac{AP}{PC} = \frac{1}{3}$. Прямая, проходящая через точки S и P, пересекает границу семивершинника в точке X. Найдите площадь сечения семивершинника плоскостью, содержащей прямые SP и SO, где O – центр боковой грани $ABCD$. Чему равна длина отрезка SX?

Решение. Пусть a – сторона основания призмы, b – боковое ребро, c – боковое ребро пирамиды $SABCD$. Пусть далее точка Н – середина отрезка EF, прямая SH перпендикулярна плоскости $ABCD$. Искомое сечение – четырехугольник $ASCH$, площадь которого равна сумме площадей ASC и ACH, где $AC = \sqrt{5}; SO = 1 \Rightarrow S_{\Delta ASC} = AC \cdot SO / 2 = \sqrt{5}/2$.

В треугольнике ACH: $OH = a\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\triangle ACH} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot a\sqrt{3}$. Подставляя значения a=1, b=2, c=3/2, получаем $S_{\triangle ASC} = \frac{\sqrt{5}}{2}, S_{\triangle ACH} = \frac{1}{4}\sqrt{15} \Rightarrow S_{ASCH} = \frac{\sqrt{5}}{4}(2 + \sqrt{3})$.

Точка X – точка пересечения прямых SP и AH. Обозначим угол OSP через α, а угол SHX через β. Тогда в треугольнике SHX сторона $SH = OH + OS = \dfrac{a\sqrt{3}+\sqrt{4c^2-a^2-b^2}}{2} = 1+\sqrt{3}/2$. Кроме того,

$$tg\alpha = OP/OS = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2\sqrt{4c^2-a^2-b^2}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}}, \cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Аналогично $tg\beta = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \sin\beta = \sqrt{\dfrac{5}{8}}, \cos\beta = \sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

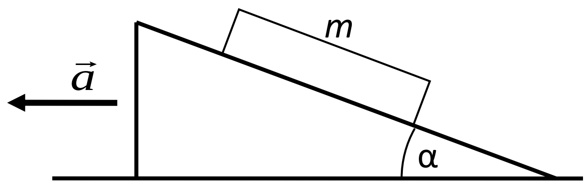
По теореме синусов в треугольнике SHX:

$$\frac{SX}{\sin\beta} = \frac{SH}{\sin(\alpha+\beta)} \Leftrightarrow SX = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{(5+2\sqrt{3})\sqrt{21}}{26}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}}{4}(2+\sqrt{3}); \dfrac{(5+2\sqrt{3})\sqrt{21}}{26}$.

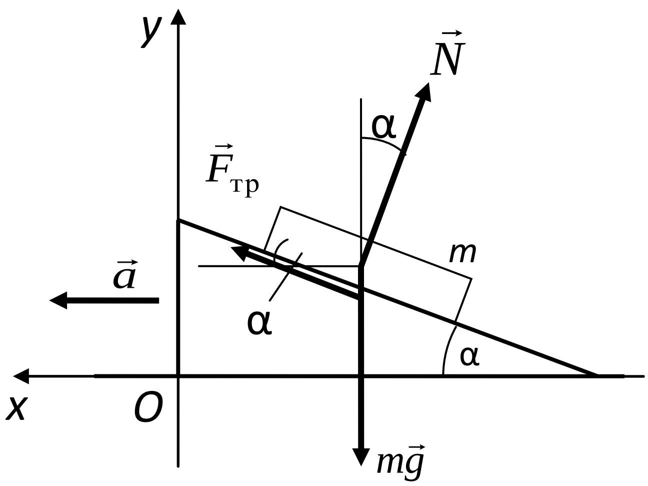
Задание 6.

При землетрясениях происходит движение точек земной поверхности, до которых дошла сейсмическая волна. Характер разрушений, вызываемых сейсмической волной, сильно зависит от того, сопровождается ли это движение значительными деформациями земной поверхности, или нет. Представление о последствиях прохождения сейсмической волны без значительных деформаций земной поверхности можно получить, решая следующую задачу.



Брусок m покоится на наклонном плоском недеформируемом основании, составляющем угол α с горизонтом. Коэффициент трения между бруском и наклонным основанием μ = 0,6. Основание движется поступательно с постоянным горизонтальным ускорением $\vec{a}$, как показано на рисунке. Максимальное значение модуля ускорения $\vec{a}$, при котором брусок сохраняет свое состояние покоя относительно основания при движении последнего, равно a = 2,5 м/с^2. Найдите α (в ответе достаточно указать численное значение sin α, cos α или tg α). Ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

Решение.



На брусок действуют следующие силы: со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Со стороны опоры – сила реакции, представленная в виде суммы двух векторов: нормальной составляющей $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости, и силы трения $\vec{F}_{тр}$, направленной по касательной к наклонной плоскости.

Согласно 2-му закону Ньютона, сумма приложенных к телу сил вызывает его ускорение: $\vec{F} = m\vec{a}$. Ускорение бруска равно ускорению основания и поэтому направлено <u>влево</u> (см. рисунок). Значит, равнодействующая приложенных к бруску сил тоже направлена влево. Но сила $m\vec{g}$ вертикальна, а сила $\vec{N}$ направлено вверх-вправо. Поэтому сила трения должна быть направлена вдоль наклонной плоскости вверх-влево.

Сила трения в данной задаче является силой трения покоя, ее модуль связан с модулем нормальной составляющей силы реакции опоры неравенством $F_{\text{тр}} \le \mu N$, где μ – коэффициент трения. В случае максимального ускорения модуль силы трения тоже максимален и выражается равенством $F_{\text{тр}} = \mu N$.

$$\begin{cases} F_{\text{тр}}\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ F_{\text{тр}}\sin\alpha + N\cos\alpha - mg = 0 \\ F_{\text{тр}} = \mu N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu N\cos\alpha - N\sin\alpha = ma \\ \mu N\sin\alpha + N\cos\alpha = mg \end{cases}$$

$$\frac{ma}{\mu\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{mg}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha},$$

$$a_{\text{макс}} = g\,\frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = g\,\frac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

$$a\cdot(\mu\operatorname{tg}\alpha + 1) = g\cdot(\mu - \operatorname{tg}\alpha).$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a}.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mu g - a}{g + \mu a} = \frac{0{,}6\cdot 10 - 2{,}5}{10 + 0{,}6\cdot 2{,}5} = \frac{3{,}5}{11{,}5} = \frac{7}{23} \approx 0{,}3.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\mu g - a}{g + \mu a} = \dfrac{7}{23} \approx 0{,}3$, или $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\mu g - a}{g + \mu a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{7}{23}\right) \approx \operatorname{arctg} 0{,}3$.

2013/2014 учебный год

КРИТЕРИИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ[2]

олимпиады школьников «ЛОМОНОСОВ»

по ГЕОЛОГИИ для 10-11 классов

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ:

*От **80** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР:

*От **50** баллов до **79** баллов включительно.*

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ПОБЕДИТЕЛЬ (диплом I степени):

*От **90** баллов включительно и выше.*

ПРИЗЁР (диплом II степени):

*От **75** баллов до **89** баллов включительно.*

ПРИЗЁР (диплом III степени):

*От **65** баллов до **74** баллов включительно.*

[2] *Утверждены на заседании жюри олимпиады школьников «Ломоносов» по геологии.*