ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ» ПО ГЕОЛОГИИ 2013/2014 учебный год

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА

ЗАДАНИЯ ТРЕТЬЕГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1

1.1. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, $x+11y=11$, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{11}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(11,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(11,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{33}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{11}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 11.

Ответ: 11

1.2. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, $x+13y=13$, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{13}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(13,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(13,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{39}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{13}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 13.

Ответ: 13

1.3. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, $x+17y=17$, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{17}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(17,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(17,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{51}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{17}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 17.

Ответ: 17

1.4. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+19y=19*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{19}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(19,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(19,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{57}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{19}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 19.

Ответ: 19

1.5. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+23y=23*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{23}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(23,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(23,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{69}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{23}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 23.

Ответ: 23

1.6. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+29y=29*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{29}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(29,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(29,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{87}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3}\cdot SC\cdot\frac{1}{2}\cdot(BM+CD)=\frac{29}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 29.

Ответ: 29

1.7. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+31y=31*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y+z-\frac{x}{31}=2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(31,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(31,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2}\cdot OE\cdot OA\cdot OC=\frac{93}{2}$, объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3} \cdot SC \cdot \frac{1}{2} \cdot (BM + CD) = \frac{31}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 31.

Ответ: 31

1.8. Выявление аномалий силы тяжести и их геологическая интерпретация являются важными задачами гравиметрии (раздела геофизики), поскольку эти аномалии указывают на изменения плотности породы, обусловленные наличием полезных ископаемых. В вычислительных задачах гравиметрии характеристики геофизического поля определяются по распределению физических характеристик породы рассматриваемой области. Сама область представляется в виде совокупности стандартных объемных фигур различной конфигурации, не имеющих друг с другом общих внутренних точек. Одной из стандартных принятых для расчетов фигур является вертикальная треугольная призма, пример которой здесь рассмотрен.

Вертикальная треугольная призма расположена в области с неотрицательными координатами (x,y,z) декартовой системы, ограничена сбоку тремя плоскостями: x=0, y=0, *x+37y=37*, снизу плоскостью z=0, а сверху плоскостью $y + z - \frac{x}{37} = 2$. Чему равен объем данной фигуры?

Решение.

Фигура является многогранником с вершинами в точках A(37,0,0), E(0,1,0), O(0,0,0), M(0,1,1), D(0,0,2), S(37,0,3). Верхняя грань – треугольник SDM, нижняя грань – треугольник AOE. Боковые грани – трапеции DMEO, AODS и AEMS, перпендикулярны плоскости основания AOE. Проведем через точку S как наиболее высокую вершину грани SDM плоскость, параллельную основанию AOE. Эта плоскость проходит через точки B(0,1,3) и C(0,0,3). При этом получается прямая призма AOESCB с нижним основанием AOE и верхним основанием SCB, боковые ребра ее SA, CO и BE, при этом точка M лежит на ребре BE, а точка D – на ребре CO. Объем призмы AOESCB равен $\frac{1}{2} \cdot OE \cdot OA \cdot OC = \frac{111}{2}$,

объем пирамиды SMBCD равен $\frac{1}{3} \cdot SC \cdot \frac{1}{2} \cdot (BM + CD) = \frac{37}{2}$. Искомый объем получается как разность полученных объемов и равен 37.

Ответ: 37

Задание 2

2.1. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 1$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta v^2$ ($\beta = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/м). Найти величину v скорости камня в наивысшей точке его траектории, если величина его ускорения в этой точке в $n = 1{,}4$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng .$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\beta}\sqrt{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 10}{3 \cdot 10^{-3}}\sqrt{1{,}4^2 - 1}} \approx 57 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v \approx 57$ м/с.

2.2. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 0{,}5$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta v^2$ ($\beta = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м). Найти величину v скорости камня в наивысшей точке его траектории, если величина его ускорения в этой точке в $n = 1{,}3$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng .$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\beta}\sqrt{n^2 - 1}} = \sqrt{\frac{0{,}5 \cdot 10}{2 \cdot 10^{-3}}\sqrt{1{,}3^2 - 1}} \approx 46 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v \approx 46$ м/с.

2.3. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta \upsilon^2$ ($\beta = 2\cdot 10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня $\upsilon = 45$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}3$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти массу m камня.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\ .$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$m = \frac{\beta v^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2\cdot 10^{-3}\cdot 45^2}{10\sqrt{1{,}3^2 - 1}} \approx 0{,}49\,\text{кг}.$$

Ответ: $m \approx$ 0,49 кг.

2.4. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля скорости: $F_{\text{сопр}} = \beta \upsilon^2$ ($\beta = 2{,}5\cdot 10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня $\upsilon = 50$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}4$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти массу m камня.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{\text{сопр}}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{\text{сопр}}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\ .$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$m = \frac{\beta v^2}{g\sqrt{n^2 - 1}} = \frac{2{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 50^2}{10\sqrt{1{,}4^2 - 1}} \approx 0{,}64\,\text{кг}.$$

Ответ: $m \approx$ 0,64 кг.

2.5. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 1$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta v^2$. В наивысшей точке траектории скорость камня равна $v = 50$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}4$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти коэффициент β.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$\beta = \frac{mg\sqrt{n^2-1}}{v^2} = \frac{1 \cdot 10 \cdot \sqrt{1{,}4^2 - 1}}{50^2} \approx 4 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}.$$

Ответ: $\beta \approx 4 \cdot 10^{-3}$ кг/м.

2.6. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 0{,}5$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta v^2$. В наивысшей точке траектории скорость камня равна $v = 45$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в $n = 1{,}3$ раза больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти коэффициент β.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$\beta = \frac{mg\sqrt{n^2-1}}{v^2} = \frac{0{,}5 \cdot 10 \cdot \sqrt{1{,}3^2 - 1}}{45^2} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}.$$

Ответ: $\beta \approx 2 \cdot 10^{-3}$ кг/м.

2.7. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 1$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta\upsilon^2$ ($\beta = 3\cdot10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня равна $\upsilon = 50$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в n раз больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти n.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$n = \sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{3\cdot10^{-3}\cdot50^2}{1\cdot10}\right)^2 + 1} = 1{,}25\,.$$

Ответ: n = 1,25.

2.8. При извержении вулкана один из камней, вылетающих из его жерла, имеет массу $m = 0{,}5$ кг и движется как тело, брошенное под углом к горизонту. Сила сопротивления воздуха направлена против скорости камня, а ее модуль пропорционален квадрату модуля его скорости: $F_{сопр} = \beta\upsilon^2$ ($\beta = 2\cdot10^{-3}$ кг/м). В наивысшей точке траектории скорость камня равна $\upsilon = 45$ м/с, а модуль его ускорения в этой точке в n раз больше ускорения свободного падения $g = 10$ м/с^2: $a = ng$. Найти n.

Решение.

В наивысшей точке траектории камня его скорость направлена по горизонтали, поэтому сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{сопр}$ тоже направлена горизонтально. Сила тяжести $m\vec{g}$ направлена вертикально. Поэтому величина равнодействующей приложенных к камню сил равна $F = \sqrt{F_{сопр}^2 + (mg)^2}$, а модуль его ускорения равен

$$a = \frac{F}{m} = g\sqrt{\left(\frac{F_{сопр}}{mg}\right)^2 + 1} = g\sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = ng\,.$$

Из последнего равенства получаем:

$$\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 = n^2 - 1,$$

откуда

$$n = \sqrt{\left(\frac{\beta v^2}{mg}\right)^2 + 1} = \sqrt{\left(\frac{2\cdot10^{-3}\cdot45^2}{0{,}5\cdot10}\right)^2 + 1} \approx 1{,}29\,.$$

Ответ: $n \approx$ 1,29.

Задание 3

3.1. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $10\sin(\frac{x}{20})+10\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 7.5 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины b тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\geq b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\leq-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\leq\frac{x}{20}\leq\pi-u+v$, $0\leq x\leq 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)$>0. Для заданных значений a=10, b=7.5, c=5 получим $x_{\min}$=13.78<20.

Ответ: 14 км

3.2. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $9\sin(\frac{x}{20})+10\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 6.5 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины b тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\geq b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\leq-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi - u - v \le \frac{x}{20} \le \pi - u + v$, $0 \le x \le 20$, где $v = \arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}}) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi - u - v)$ >0. Для заданных значений a=9, b=6.5, c=5 получим $x_{\min}$ =13.07<20.

Ответ: 13 км

3.3. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $8\sin(\frac{x}{20}) + 8\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 6.5 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a \cdot \sin(\frac{x}{20}) + 2c \cdot \sin^2(\frac{x}{40}) = a \cdot \sin(\frac{x}{20}) - c \cdot \cos(\frac{x}{20}) + c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a \cdot \sin(\frac{x}{20}) - c \cdot \cos(\frac{x}{20}) + c \ge b \Leftrightarrow \sqrt{c^2+a^2} \cdot \cos(\frac{x}{20} + u) \le -(b-c),$$

где $u = \arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}}) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi - u - v \le \frac{x}{20} \le \pi - u + v$, $0 \le x \le 20$, где $v = \arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}}) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi - u - v)$ >0. Для заданных значений a=8, b=6.5, c=4 получим $x_{\min}$ =14.94<20.

Ответ: 15 км

3.4. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $7\sin(\frac{x}{20}) + 8\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее $6\frac{2}{3}$ км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a \cdot \sin(\frac{x}{20}) + 2c \cdot \sin^2(\frac{x}{40}) = a \cdot \sin(\frac{x}{20}) - c \cdot \cos(\frac{x}{20}) + c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)>0$. Для заданных значений a=7, b=6.(6), c=4 получим $x_{\min}$=17.12<20.

Ответ: 17 км

3.5. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{19}{2}\sin(\frac{x}{20})+8\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 6 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a,b,c,* где *b>c,* указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)>0$. Для заданных значений a=9.5, b=6, c=4 получим $x_{\min}$=11.88<20.

Ответ: 12 км

3.6. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{17}{2}\sin(\frac{x}{20})+12\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 8 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a*,*b*,*c*, где *b*>*c*, указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины b тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)$>0. Для заданных значений a=8.5, b=8, c=6 получим $x_{\min}$=16.16<20.

Ответ: 16 км

3.7. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{15}{2}\sin(\frac{x}{20})+12\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 9 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение.

Для положительных значений параметров *a*,*b*,*c*, где *b*>*c*, указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины b тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\ge b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\le-(b-c),$$

где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\le\frac{x}{20}\le\pi-u+v$, $0\le x\le 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)$>0. Для заданных значений a=7.5, b=9, c=6 получим $x_{\min}$=19.84<20.

Ответ: 20 км

3.8. Океаническая литосферная плита соприкасается с континентальной плитой и погружается под нее на восток в зоне субдукции, при этом континентальная плита остается горизонтальной. На рассматриваемом профиле точка соединения кровли океанической и подошвы континентальной плит находится на некоторой глубине и при возрастании расстояния x, 0≤x≤20(км), от этой точки на восток разность глубин кровли океанической и подошвы континентальной плит равна $\frac{13}{2}\sin(\frac{x}{20})+8\sin^2(\frac{x}{40})$ (км). Магматические нагрузки, достаточные для возникновения вулканов, появляются, если эта разность глубин не менее 7 км. На каком минимальном расстоянии от точки соприкосновения двух плит это возможно? Ответ следует округлить до целых км.

Решение. Для положительных значений параметров *a,b,c*, где *b>c*, указанная в условии разность глубин равна

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})+2c\cdot\sin^2(\frac{x}{40})=a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c.$$

Эта разность не менее величины *b* тогда и только тогда, когда

$$a\cdot\sin(\frac{x}{20})-c\cdot\cos(\frac{x}{20})+c\geq b\Leftrightarrow\sqrt{c^2+a^2}\cdot\cos(\frac{x}{20}+u)\leq-(b-c),$$

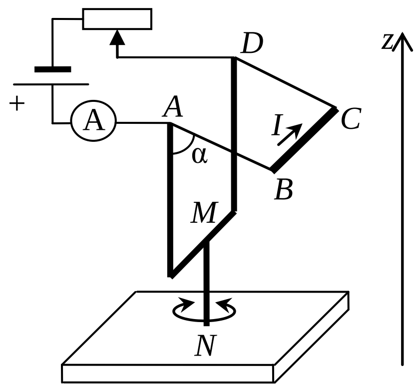
где $u=\arccos(\frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Решая полученное неравенство, получаем

$\pi-u-v\leq\frac{x}{20}\leq\pi-u+v$, $0\leq x\leq 20$, где $v=\arccos(\frac{b-c}{\sqrt{c^2+a^2}})\in(0,\frac{\pi}{2})$. Искомое минимальное значение $x_{\min}$ равно $20(\pi-u-v)>0$. Для заданных значений a=6.5, b=7, c=4 получим $x_{\min}=19.11<20$.

Ответ: 19 км

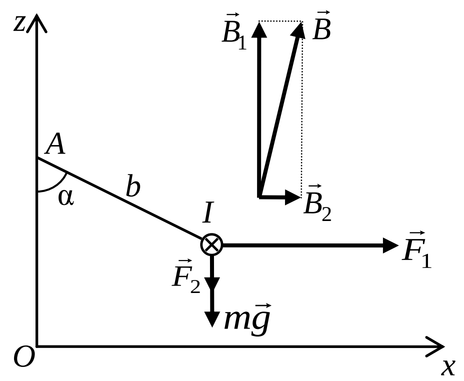
Задание 4

4.1. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка *ABCD* состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 10 см. Отрезки *AB* и *CD* – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок *BC* – стержень массой m = 20 г. В точках *A* и *D* рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси *MN*. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от *B* к *C*, то вилка поворачивается так, что отрезок *BC* устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости *AMD* на угол α (см. рисунок).
При $I = I_1$ = 5 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось z. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси *AD* могут только внешние силы, приложенные к отрезку *BC*: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси *AD* в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1 - (I_1B_xb + mg)\cdot b\sin\alpha_1 = 0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2 - (I_2B_xb + mg)\cdot b\sin\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\sin\alpha_2$, а второе на $(-I_1\sin\alpha_1)$ и сложим их. Получим:

$$I_1I_2B_zb\cdot(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2) - mg(I_2 - I_1)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 = 0,$$

откуда

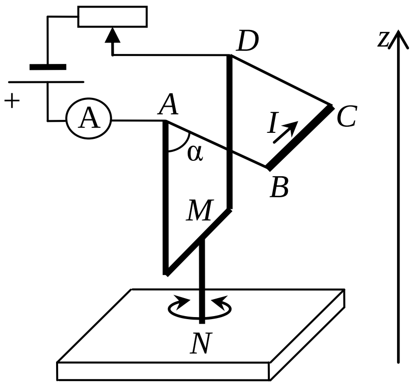
$$B_z = \frac{mg(I_2 - I_1)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{I_1I_2b\cdot(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2)} = \frac{mg(I_2 - I_1)}{I_1I_2b\cdot(\mathrm{ctg}\,\alpha_1 - \mathrm{ctg}\,\alpha_2)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z = \frac{0{,}02\cdot 10\cdot(10-5)}{5\cdot 10\cdot 0{,}1\cdot(\sqrt{3}-1)} = 0{,}1\cdot(\sqrt{3}+1) \approx 0{,}27\ (\text{Тл}).$$

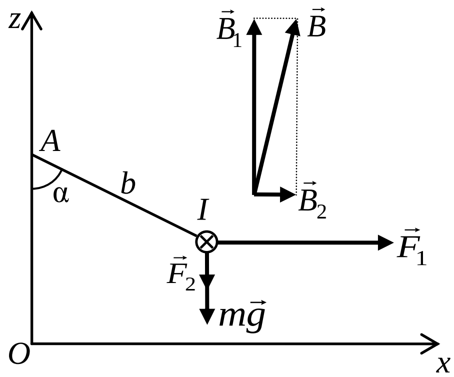
Ответ: $B_z \approx 0{,}27$ Тл.

4.2. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 20 см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 50 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол α (см. рисунок).
При $I = I_1$ = 4 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось z. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1-\left(I_1B_xb+mg\right)\cdot b\sin\alpha_1=0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2-\left(I_2B_xb+mg\right)\cdot b\sin\alpha_2=0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\sin\alpha_2$, а второе на $\left(-I_1\sin\alpha_1\right)$ и сложим их. Получим:

$$I_1I_2B_zb\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right)-mg\left(I_2-I_1\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2=0,$$

откуда

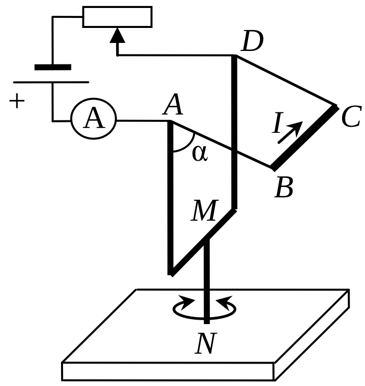
$$B_z=\frac{mg\left(I_2-I_1\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha_2}{I_1I_2b\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right)}=\frac{mg\left(I_2-I_1\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\mathrm{ctg}\alpha_1-\mathrm{ctg}\alpha_2\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z=\frac{0{,}05\cdot10\cdot\left(10-4\right)}{4\cdot10\cdot0{,}2\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{3}{16}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\approx0{,}51(\text{Тл}).$$

Ответ: $B_z \approx 0{,}51$ Тл.

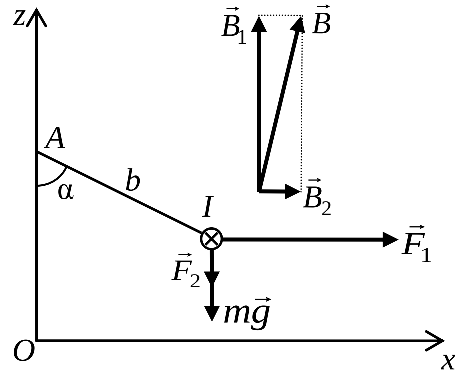
4.3. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 10 см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 20 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол α (см. рисунок).

При $I = I_1$ = 5 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию $B_{гор}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{гор}$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_{гор}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1-\left(I_1B_{гор}b+mg\right)\cdot b\sin\alpha_1=0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2-\left(I_2B_{гор}b+mg\right)\cdot b\sin\alpha_2=0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\cos\alpha_2$, а второе на $\left(-I_1\cos\alpha_1\right)$ и сложим их. Получим:

$$\left(I_2B_{гор}b+mg\right)\cdot\sin\alpha_2\cdot I_1\cos\alpha_1-\left(I_1B_{гор}b+mg\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot I_2\cos\alpha_2=0,$$

откуда

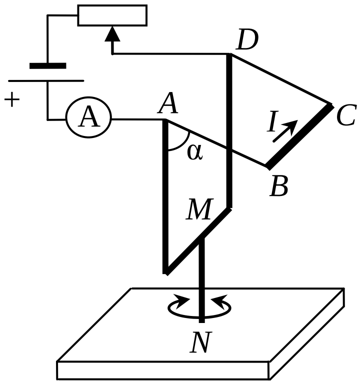
$$B_{гор}=\frac{mg\left(I_2\cdot\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2-I_1\cdot\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2-\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right)}=\frac{mg\left(I_2\mathrm{tg}\alpha_1-I_1\mathrm{tg}\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\mathrm{tg}\alpha_2-\mathrm{tg}\alpha_1\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{гор}=\frac{0{,}02\cdot10\cdot\left(10\dfrac{\sqrt{3}}{3}-5\cdot1\right)}{5\cdot10\cdot0{,}1\cdot\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}=\frac{\left(2\sqrt{3}-3\right)\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)}{30}=\frac{\sqrt{3}-1}{10}\approx0{,}07\ (\text{Тл}).$$

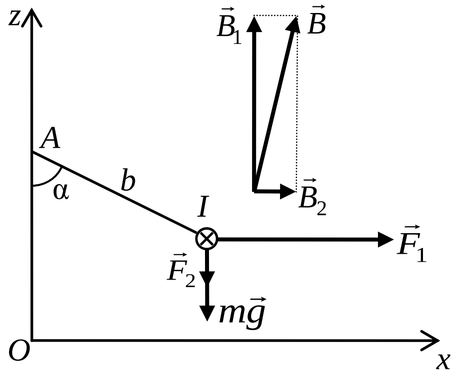
Ответ: $B_{гор}\approx$ 0,07 Тл.

4.4. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка *ABCD* состоит из трех отрезков одинаковой длины b = 20 см. Отрезки *AB* и *CD* – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок *BC* – стержень массой m = 50 г. В точках *A* и *D* рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси *MN*. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток I в направлении от *B* к *C*, то вилка поворачивается так, что отрезок *BC* устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости *AMD* на угол α (см. рисунок).
При $I = I_1$ = 4 А угол $\alpha = \alpha_1 = 30°$, при $I = I_2$ = 10 А угол $\alpha = \alpha_2 = 45°$. Найти проекцию $B_{\text{гор}}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{\text{гор}}$. Повернуть рамку вокруг оси *AD* могут только внешние силы, приложенные к отрезку *BC*: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_{\text{гор}}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси *AD* в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} I_1B_zb\cdot b\cos\alpha_1 - \left(I_1B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha_1 = 0, \\ I_2B_zb\cdot b\cos\alpha_2 - \left(I_2B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $I_2\cos\alpha_2$, а второе на $\left(-I_1\cos\alpha_1\right)$ и сложим их. Получим:

$$\left(I_2B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot\sin\alpha_2\cdot I_1\cos\alpha_1 - \left(I_1B_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot\sin\alpha_1\cdot I_2\cos\alpha_2 = 0,$$

откуда

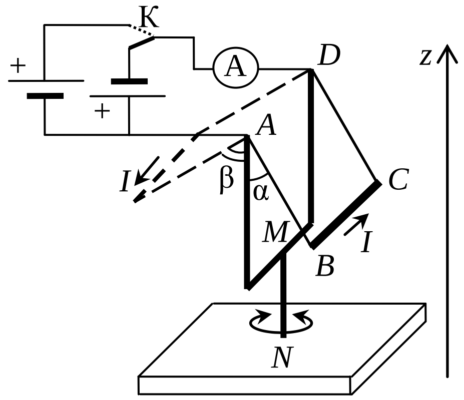
$$B_{\text{гор}} = \frac{mg\left(I_2\cdot\sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 - I_1\cdot\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\cos\alpha_1\cdot\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cdot\cos\alpha_2\right)} = \frac{mg\left(I_2\mathrm{tg}\alpha_1 - I_1\mathrm{tg}\alpha_2\right)}{I_1I_2b\cdot\left(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_1\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{\text{гор}} = \frac{0{,}05\cdot 10\cdot\left(10\dfrac{\sqrt{3}}{3} - 4\cdot 1\right)}{4\cdot 10\cdot 0{,}2\cdot\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\left(5\sqrt{3} - 6\right)\cdot\left(3 + \sqrt{3}\right)}{48} = \frac{3\sqrt{3} - 1}{16} \approx 0{,}26\ (\text{Тл}).$$

Ответ: $\boldsymbol{B_{\text{гор}} \approx 0{,}26}$ **Тл.**

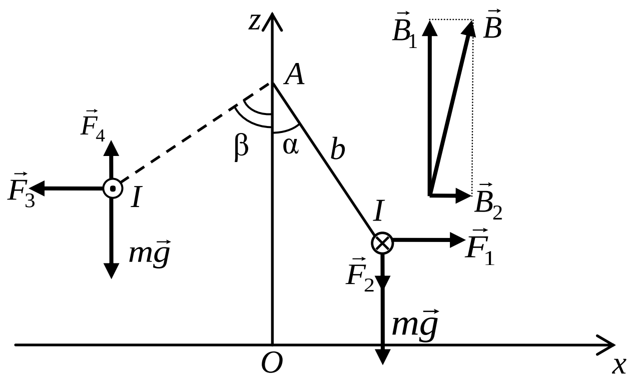
4.5. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 10$ см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 20 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 5$ А в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол $\alpha = 30°$ (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от C к B, то плоскость рамки отклоняется от плоскости AMD на угол $\beta = 45°$ в противоположном направлении.

Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось z. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_zb$, $F_4 = F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_zb \cdot b\cos\alpha - (IB_xb + mg)\cdot b\sin\alpha = 0, \\ -IB_zb \cdot b\cos\beta + (mg - IB_xb)\cdot b\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\sin\beta$, а второе на $(-\sin\alpha)$ и сложим их. Получим:

$$IB_zb\cdot(\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta) - 2mg\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = 0,$$

откуда

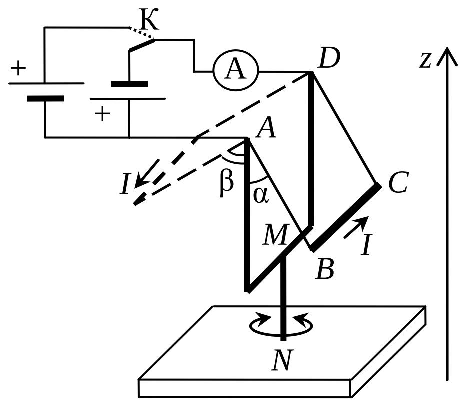
$$B_z = \frac{2mg \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{Ib \cdot (\cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta)} = \frac{2mg}{Ib \cdot (\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z = \frac{2 \cdot 0{,}02 \cdot 10}{5 \cdot 0{,}1 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)} = 0{,}4 \cdot \left(\sqrt{3}-1\right) \approx 0{,}29 \text{ (Тл)}.$$

Ответ: $B_z \approx 0{,}29$ Тл.

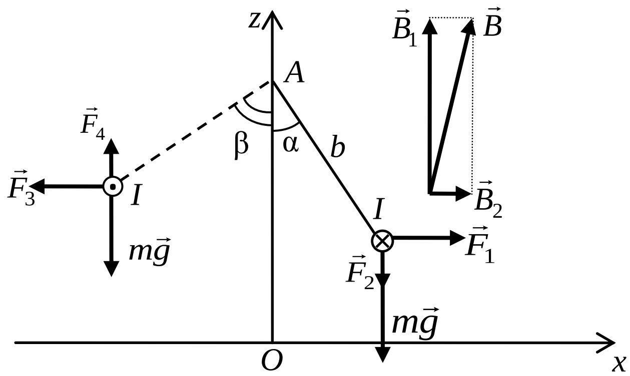
4.6. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 20$ см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой $m = 50$ г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 4$ А в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол $\alpha = 30°$ (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от C к B, то плоскость рамки отклоняется от плоскости AMD на угол $\beta = 45°$ в противоположном направлении.

Найти проекцию B_z вектора $\vec{B}$ на вертикальную ось z. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_x$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_zb$, $F_2 = IB_xb$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_zb$, $F_4 = F_2 = IB_xb$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_z b\cdot b\cos\alpha - \left(IB_x b + mg\right)\cdot b\sin\alpha = 0, \\ -IB_z b\cdot b\cos\beta + \left(mg - IB_x b\right)\cdot b\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\sin\beta$, а второе на $\left(-\sin\alpha\right)$ и сложим их. Получим:

$$IB_z b\cdot\left(\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta\right) - 2mg\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta = 0,$$

откуда

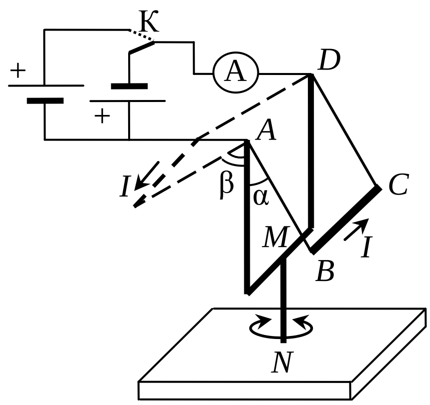
$$B_z = \frac{2mg\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{Ib\cdot\left(\cos\alpha\cdot\sin\beta + \sin\alpha\cdot\cos\beta\right)} = \frac{2mg}{Ib\cdot\left(\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{ctg}\beta\right)}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_z = \frac{2\cdot 0{,}05\cdot 10}{4\cdot 0{,}2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)} = \frac{5}{8}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right) \approx 0{,}46\,(\text{Тл}).$$

Ответ: $B_z \approx 0{,}46$ Тл.

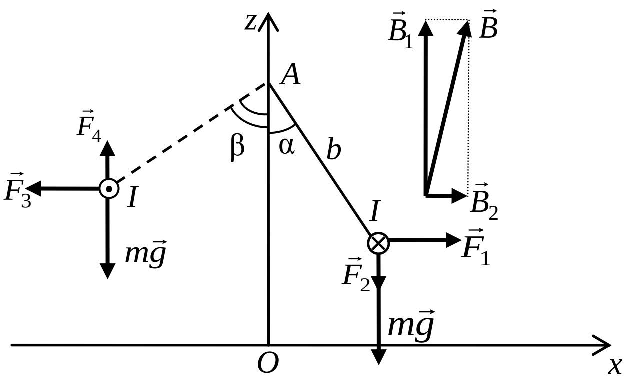
4.7. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 10$ см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 20 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 5$ А в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол $\alpha = 30°$ (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от C к B, то плоскость рамки отклоняется от плоскости AMD на угол $\beta = 45°$ в противоположном направлении.

Найти проекцию $B_{\text{гор}}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{\text{гор}}$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$).

При этом $F_1 = IB_z b$, $F_2 = IB_{гор}b$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_z b$, $F_4 = F_2 = IB_{гор}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_z b\cdot b\cos\alpha - \left(IB_{гор}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha = 0, \\ -IB_z b\cdot b\cos\beta + \left(mg - IB_{гор}b\right)\cdot b\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\cos\beta$, а второе на $\cos\alpha$ и сложим их. Получим:

$$IB_{гор}b\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right) = mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right),$$

откуда

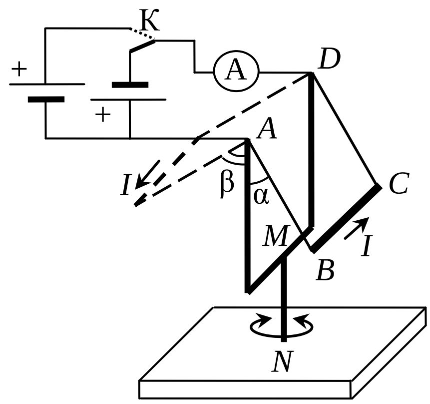
$$B_{гор} = \frac{mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right)}{Ib\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right)} = \frac{mg}{Ib}\cdot\frac{tg\beta - tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{гор} = \frac{0{,}02\cdot 10}{5\cdot 0{,}1}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1} = 0{,}4\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = 0{,}4\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}11\,(\text{Тл}).$$

Ответ: $B_{гор} \approx 0{,}11$ Тл.

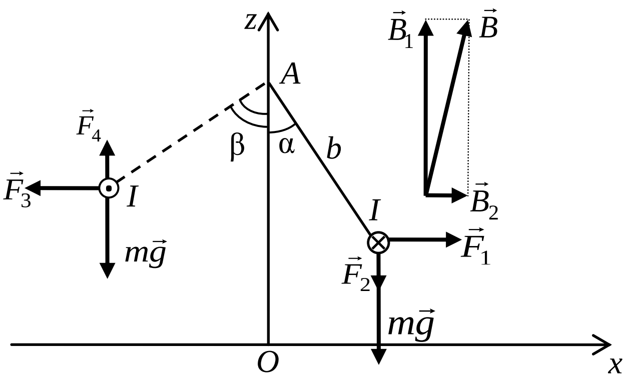
4.8. В поиске месторождений полезных ископаемых важную роль играет исследование магнитного поля в их окрестности. Для определения направления индукции магнитного поля можно использовать обычный компас с магнитной стрелкой. Для измерения величины вектора магнитной индукции требуются более сложные устройства.



Жесткая П-образная прямоугольная медная рамка $ABCD$ состоит из трех отрезков одинаковой длины $b = 20$ см. Отрезки AB и CD – тонкие спицы пренебрежимо малой массы. Отрезок BC – стержень массой m = 50 г. В точках A и D рамка шарнирно соединена с изолирующей подставкой в виде вилки, способной свободно вращаться вокруг вертикальной оси MN. В этих точках рамка подключена к электрической цепи. Вся система находится в поле тяжести Земли и внешнем постоянном однородном магнитном поле $\vec{B}$, величина и направление которого неизвестны. Если по рамке протекает ток $I = 4$ А в направлении от B к C, то вилка поворачивается так, что отрезок BC устанавливается перпендикулярно вертикальной плоскости, в которой лежит вектор $\vec{B}$. Плоскость рамки при этом отклоняется от вертикальной плоскости AMD на угол $\alpha = 30°$ (см. рисунок). Если тот же ток протекает в направлении от C к B, то плоскость рамки отклоняется от плоскости AMD на угол $\beta = 45°$ в противоположном направлении.

Найти проекцию $B_{гор}$ вектора $\vec{B}$ на горизонтальную плоскость. Трением в шарнирных соединениях пренебречь.

Решение



Представим неизвестный вектор $\vec{B}$, лежащий в вертикальной плоскости чертежа, в виде суммы двух векторов – вертикального $\vec{B}_1$ и горизонтального $\vec{B}_2$ (см. рисунок). При этом $B_1 = B_z$, $B_2 = B_{\text{гор}}$. Повернуть рамку вокруг оси AD могут только внешние силы, приложенные к отрезку BC: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_1$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_2$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_1 = IB_z b$, $F_2 = IB_{\text{гор}}b$. При смене направления тока на противоположное повернуть рамку могут только сила тяжести $m\vec{g}$ и силы Ампера $\vec{F}_3$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_1$) и $\vec{F}_4$ (вызванная магнитным полем $\vec{B}_2$). При этом $F_3 = F_1 = IB_z b$, $F_4 = F_2 = IB_{\text{гор}}b$. Условие равновесия рамки относительно вращения вокруг оси AD в двух упомянутых в условии случаях запишется в виде системы двух уравнений относительно B_x и B_z:

$$\begin{cases} IB_z b\cdot b\cos\alpha - \left(IB_{\text{гор}}b + mg\right)\cdot b\sin\alpha = 0, \\ -IB_z b\cdot b\cos\beta + \left(mg - IB_{\text{гор}}b\right)\cdot b\sin\beta = 0. \end{cases}$$

Сократим оба уравнения на b, домножим первое из них на $\cos\beta$, а второе на $\cos\alpha$ и сложим их. Получим:

$$IB_{\text{гор}}b\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right) = mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right),$$

откуда

$$B_{\text{гор}} = \frac{mg\left(\sin\beta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\beta\right)}{Ib\left(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha\right)} = \frac{mg}{Ib}\cdot\frac{tg\beta - tg\alpha}{tg\alpha + tg\beta}.$$

Подставляя числовые значения из условия, получим:

$$B_{\text{гор}} = \frac{0{,}05\cdot 10}{4\cdot 0{,}2}\cdot\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{3}+1} = \frac{5}{8}\cdot\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{5}{8}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right) \approx 0{,}17 \text{ (Тл)}.$$

Ответ: $B_{\text{гор}} \approx 0{,}17$ Тл.

Тестовые задания для разминки третьего тура отборочного этапа:

Как называются мелкие живые организмы, живущие во взвешенном состоянии в толще морской воды?

Рыбы

Кораллы

Планктон

Как называется ископаемая смола деревьев?

Янтарь

Кварцит

Торф

Как называется обширная выровненная поверхность Земли (обычно не выше 200 м над уровнем моря)?

Балка

Равнина

Пойма

Как называется совокупность неровностей поверхности земли?

Терраса

Пустыня

Рельеф

Как называется узкая V-образная долина реки?

Каньон

Овраг

Терраса

В какой галактике расположена планета Земля?

Туманность Андромеды

Млечный путь

Солнечная галактика

Как называется выступающая из воды постройка из морских известковых организмов?

Валун

Вулкан

Риф

Как называется естественный выход подземных вод на поверхность?

Родник

Водопад

Пруд

Как называется источник горячей воды в областях активной вулканической деятельности?

Родник

Гейзер

Горячая точка

Как называется канал, через который выбрасывается лава?
Жерло
Шахта
Колодец

Как называется процесс разрушения и химического изменения горных пород вследствие перепадов температуры, химического и механического воздействия атмосферы, воды и организмов?
Выветривание
Сальтация
Литогенез

Как называется агрегат кристаллов, наросших на общее основание?
Конгломерат
Брекчия
Друза

Как называется форма рельефа в виде понижения, узкое по сравнению со своей длиной, в основном извилистое углубление в земной поверхности?
Бархан
Долина
Плато

Как называется углубление (воронка), возникающее в результате взрыва, который происходит при ударе крупного метеорита о твердую поверхность?
Метеоритный кратер
Метеоритный желоб
Метеоритный колодец

Как называется твердое тело, имеющее естественную форму правильного многогранника, атомы которого образуют трехмерно-периодическую пространственную укладку?
Горная порода
Диапир
Кристалл

Как называется оболочка Земли между земной корой и ядром Земли?
Мантия
Литосфера
Осадочный чехол

Как называется однородное по физическим свойствам и химическому составу природное тело, образующееся в результате физико-химических процессов в глубинах или на поверхности Земли?
Резервуар
Минерал
Коралл

Как называется скопление на суше или на дне морей мелких обломков, включающих в себя зерна или кристаллы в промышленных концентрациях?

Залежь

Карст

<u>Россыпь</u>

Как называется кусок природного металла (золота, платины, серебра, меди) достаточно больших размеров, найденный в россыпных или коренных месторождениях?

<u>Самородок</u>

Кристалл

Слиток

Как называется рыхлые отложения, состоящие из остроугольных неокатанных обломков горных пород размером от 1 до 10 мм?

Галька

Туф

<u>Щебень</u>