ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ЛОМОНОСОВ»
ПО ГЕОЛОГИИ
2013/2014 учебный год

МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА

ЗАДАНИЯ ПЕРВОГО ТУРА ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
ДЛЯ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ

Задание 1.

1.1. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 200 м и третье боковое ребро равно 250 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.1. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной a. Боковые ребра SB=SC=b, SA=x. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через d. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через h, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно d:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=200, x=250, получим

Ответ: $2.4 \cdot 10^5$(куб. м.)

1.2. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 300 м и третье боковое ребро равно 350 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.2. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2.$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2.$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}}.$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}}.$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}}.$$

Подставляя значения a=100, b=300, x=350, получим

Ответ: $3.6 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.3. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 400 м и третье боковое ребро равно 450 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.3. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=400, x=450, получим

Ответ: $4.8 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.4. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 500 м и третье боковое ребро равно 550 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.4. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=500, x=550, получим
Ответ: $6 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.5. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 600 м и третье боковое ребро равно 650 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.5. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC.

Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через *h*, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно *d*:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=600, x=650, получим
Ответ: $7.2 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.6. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 700 м и третье боковое ребро равно 750 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.6. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной *a*. Боковые ребра SB=SC=*b*, SA=*x*. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через *d*. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через h, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2.$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2.$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно d:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}}.$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}}.$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}}.$$

Подставляя значения a=100, b=700, x=750, получим

Ответ: $8.4 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.7. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 800 м и третье боковое ребро равно 850 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.7. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной a. Боковые ребра SB=SC=b, SA=x. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через d. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через h, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно d:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Подставляя значения a=100, b=800, x=850, получим

Ответ: $9.5 \cdot 10^5$ (куб. м.)

1.8. При моделировании горной выработки для добычи руды рассчитывается объем выработки, для чего рудное тело представляется в виде треугольной пирамиды, в основании которой лежит правильный треугольник со стороной основания 100 м, два боковых ребра равны по 900 м и третье боковое ребро равно 950 м. Чему равен объем рудного тела?

Решение

1.8. Пусть основание пирамиды – правильный треугольник ABC со стороной основания, равной a. Боковые ребра SB=SC=b, SA=x. Опустим из вершины S перпендикуляр SO на плоскость основания. Отрезок OB равен отрезку OC из равенства треугольников SOB и SOC. Пусть далее D – середина стороны BC. Поскольку отрезки AD и OD перпендикулярны BC, то точки A,D и O лежат на перпендикуляре к BC, при этом отрезок AO – проекция отрезка AS на плоскость ABC, OC – проекция отрезка SC, а OB – проекция отрезка SB на плоскость ABC. Обозначим разность AO-AD через d. Эта величина положительна в том и только в том случае, если точки A и O лежат по разные стороны от стороны BC. Обозначим высоту пирамиды SO через h, тогда $AO = a\frac{\sqrt{3}}{2} + d$ и по теореме Пифагора для треугольника ASO

$$h^2 = x^2 - (a\frac{\sqrt{3}}{2} + d)^2 .$$

В треугольнике OCD: $OC^2 = d^2 + \frac{a^2}{4}$, тогда для треугольника CSO:

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 .$$

Приравнивая полученные выражения для h^2, получим уравнение относительно d:

$$x^2 - \frac{3}{4}a^2 - d^2 - ad\sqrt{3} = b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2 \Leftrightarrow ad\sqrt{3} = x^2 - \frac{a^2}{2} - b^2 \Leftrightarrow$$

$$d = \frac{x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2}}{a\sqrt{3}} .$$

Отсюда высота пирамиды h равна

$$\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - d^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

Площадь основания ABC равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, откуда объем пирамиды равен

$$V = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{(x^2 - b^2 - \frac{a^2}{2})^2}{3a^2}} .$$

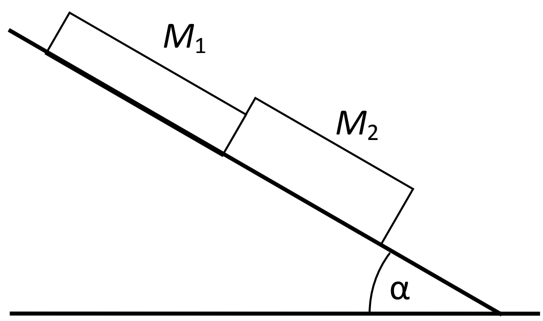
Подставляя значения a=100, b=900, x=950, получим
Ответ: $10.7 \cdot 10^5$ (куб. м.)

Задание 2.

Задача 2.1

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^o$ с горизонтом (см. рис.). Найти ускорение, с которым движутся плиты, если отношение их масс составляет $M_1/M_2 = 0,5$, а коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен $\mu = 0,1$. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

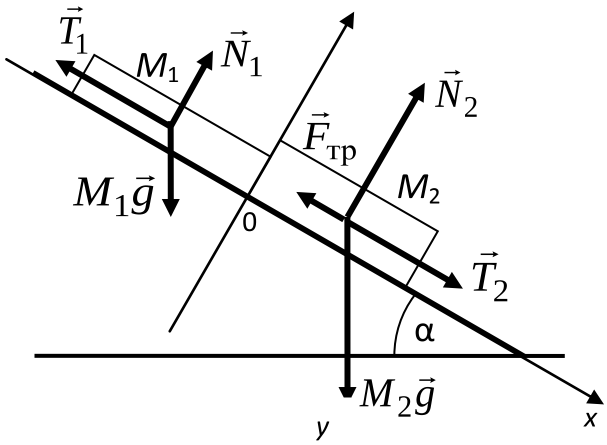


Решение

Задача 2.1.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$\begin{aligned} M_1\vec{a} &= M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1, \\ M_2\vec{a} &= M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}. \end{aligned}$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

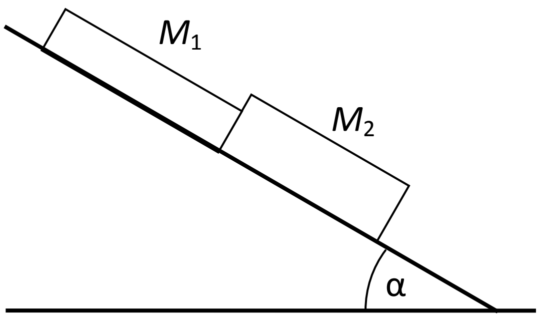
Отсюда

$$a = g\sin\alpha - \frac{\mu g \cos\alpha}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)} \approx 4{,}3\,\text{м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 4{,}3$ м/с^2.

Задача 2.2

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.



Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (см. рис.). Найти ускорение, с которым движутся плиты, если отношение их масс составляет $M_1/M_2 = 0{,}4$, а коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен $\mu = 0{,}2$. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

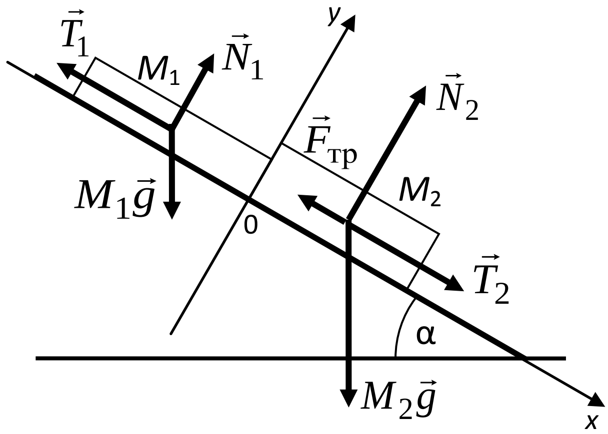
Решение

Задача 2.2.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

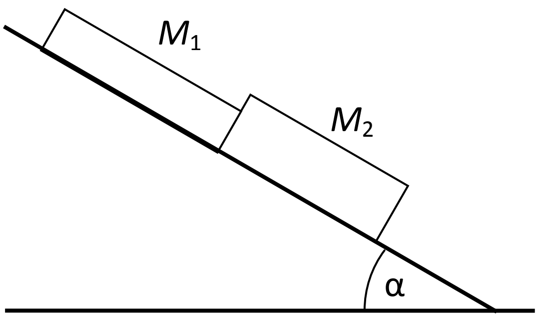
Отсюда

$$a = g\sin\alpha - \frac{\mu g\cos\alpha}{\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right)} \approx 3{,}7\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 3{,}7$ м/с^2.

Задача 2.3

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.



Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a = 4 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^{\circ}$ с горизонтом (см. рис.). Найти отношение масс двух плит M_1/M_2, если коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен $\mu = 0{,}17$. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

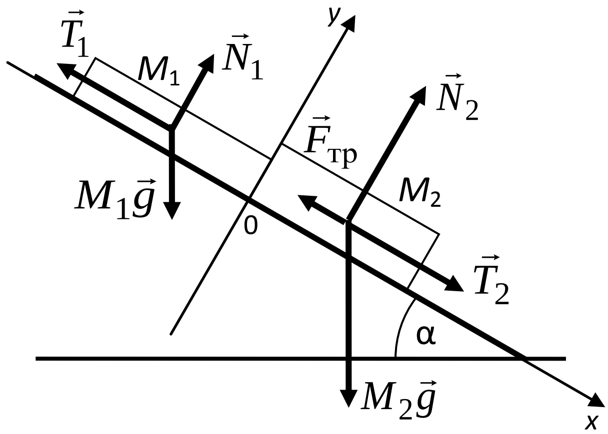
Решение

Задача 2.3.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g \sin\alpha - a}$$

и, окончательно,

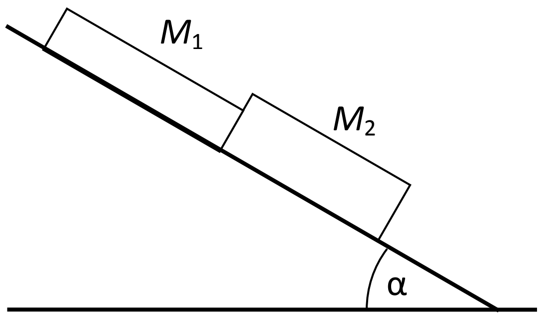
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g \sin\alpha - a} - 1 \approx 0{,}6.$$

Ответ: $\dfrac{M_1}{M_2} \approx 0{,}6.$

Задача 2.4

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a= 4,5 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол α = 30^o с горизонтом (см. рис.). Найти отношение масс двух плит M_1/M_2, если коэффициент трения между плитой массой M_2 и основанием равен μ = 0,1. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



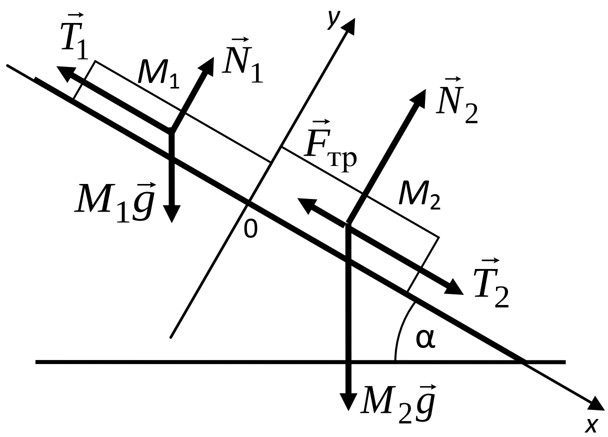
Решение

Задача 2.4.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\frac{M_1 + M_2}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g \sin\alpha - a}$$

и, окончательно,

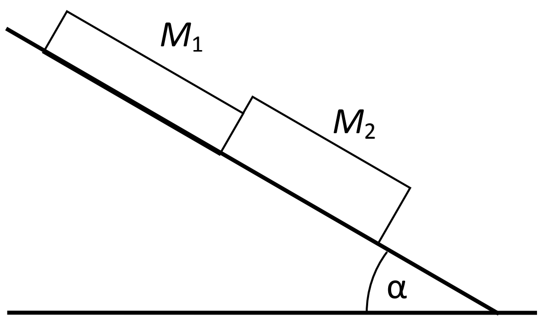
$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{\mu g \cos\alpha}{g\sin\alpha - a} - 1 \approx 1{,}1.$$

Ответ: $\frac{M_1}{M_2} \approx 1{,}1.$

Задача 2.5

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a = 4 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (см. рис.). Найти коэффициент трения μ между плитой массой M_2 и основанием, если отношение масс плит M_1/M_2=0,5. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



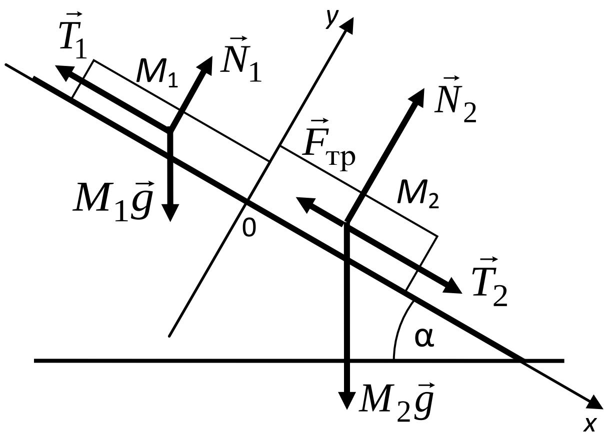
Решение

Задача 2.5.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\mu M_2 g \cos\alpha = (M_1 + M_2)\cdot(g \sin\alpha - a)$$

и, окончательно,

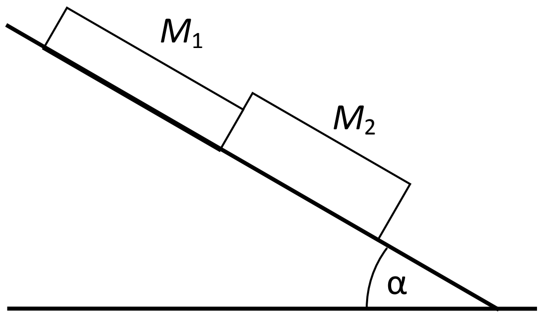
$$\mu = \left(\frac{M_1}{M_2} + 1\right)\cdot\frac{g \sin\alpha - a}{g \cos\alpha} \approx 0{,}16.$$

Ответ: $\mu \approx 0{,}16$.

Задача 2.6

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают с ускорением a = 4,5 м/с^2 вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол α = 30° с горизонтом (см. рис.). Найти коэффициент трения μ между плитой массой M_2 и основанием, если отношение масс плит M_1/M_2=0,7. Трением между плитой массой M_1 и основанием, а также трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



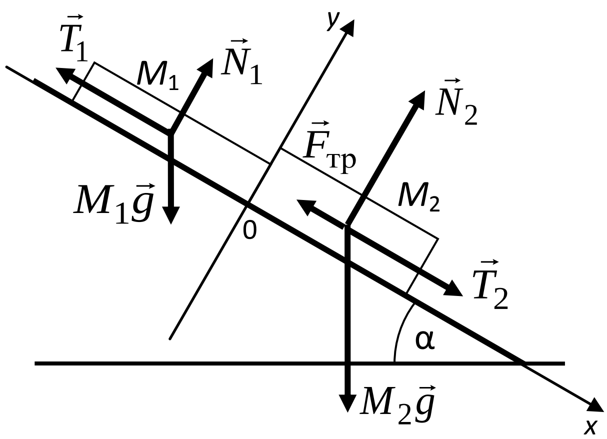
Решение

Задача 2.6.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}}$ – сила трения, действующая на плиту с массой M_2, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси *Ox* системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси *Oy* – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения полученной системы следует, что

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, сила трения, действующая на вторую плиту со стороны наклонной плоскости, равна $F_{\text{тр}} = \mu N_2 = \mu M_2 g \cos\alpha$, так что, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$\mu M_2 g \cos\alpha = (M_1 + M_2)\cdot(g \sin\alpha - a)$$

и, окончательно,

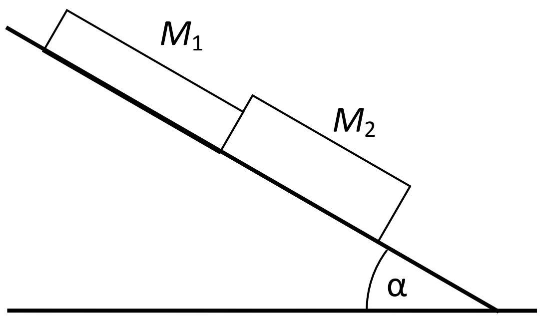
$$\mu = \left(\frac{M_1}{M_2} + 1\right)\cdot\frac{g \sin\alpha - a}{g \cos\alpha} \approx 0{,}08.$$

Ответ: $\mu \approx 0{,}08$.

Задача 2.7

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.

Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (см. рис.). Отношение масс плит $M_1/M_2 = 0{,}5$, коэффициент трения между плитой массой M_1 и основанием $\mu_1 = 0{,}1$, а между плитой массой M_2 и основанием $\mu_2 = 0{,}2$. Найти ускорение, с которым движутся плиты. Трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.



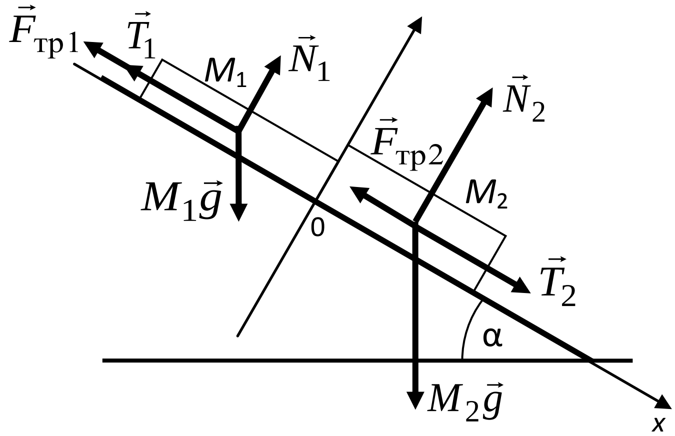
Решение

Задача 2.7.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1 \vec{a} = M_1 \vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1},$$

$$M_2 \vec{a} = M_2 \vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$ – силы трения, действующие на плиты, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T - F_{\text{тр}1}, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}2}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) полученной системы следует, что

$$N_1 = M_1 g \cos\alpha,$$

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, силы трения, действующие на первую и вторую плиты со стороны наклонной плоскости, равны

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 M_1 g \cos\alpha,$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Поэтому, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2) g \sin\alpha - \mu_1 M_1 g \cos\alpha - \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$a = g \sin\alpha - \frac{\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2}{M_1 + M_2} g \cos\alpha$$

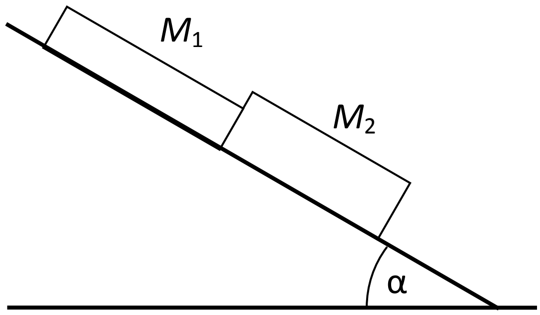
и, окончательно,

$$a = g \sin\alpha - \frac{\mu_1 \dfrac{M_1}{M_2} + \mu_2}{\dfrac{M_1}{M_2} + 1} g \cos\alpha \approx 3{,}5 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 3{,}5$ м/с^2.

Задача 2.8

При описании геологических процессов в земной коре часто используется представление о взаимном движении и перемещении тектонических плит. Для иллюстрации использования представлений о тектонических плитах рассмотрите следующую задачу.



Две плиты, касающиеся друг друга, соскальзывают вниз по плоскому наклонному основанию, составляющему угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом (см. рис.). Отношение масс плит $M_1/M_2 = 0{,}6$, коэффициент трения между плитой массой M_1 и основанием $\mu_1 = 0{,}15$, а между плитой массой M_2 и основанием $\mu_2 = 0{,}2$. Найти ускорение, с которым движутся плиты. Трением между плитами в точке их соприкосновения пренебречь.

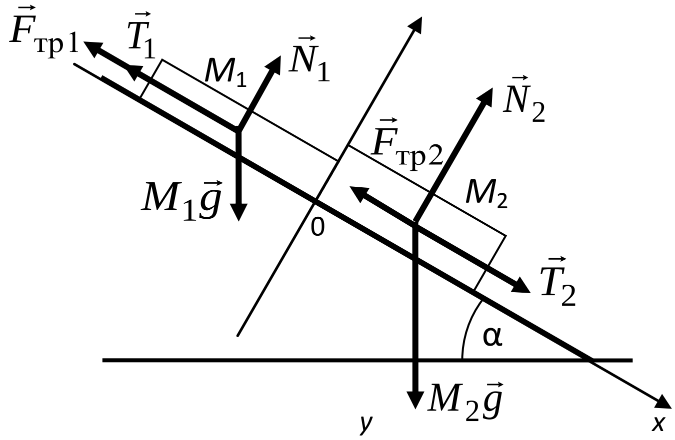
Решение

Задача 2.8.

Считая, что система отсчета, связанная с наклонной плоскостью, является инерциальной, запишем 2-й закон Ньютона для обеих плит в виде:

$$M_1\vec{a} = M_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{тр}1},$$

$$M_2\vec{a} = M_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр}2}.$$



Здесь $\vec{a}$ – ускорение плит, $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ – нормальные составляющие сил реакции, действующих на плиты со стороны наклонной плоскости, $\vec{F}_{\text{тр}1}$ и $\vec{F}_{\text{тр}2}$ – силы трения, действующие на плиты, $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия между плитами. По 3-му закону Ньютона силы $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ по величине равны одному и тому же значению T и направлены во взаимно противоположные стороны.

Выбирая направление оси Ox системы отсчета вниз вдоль наклонной плоскости, а оси Oy – вверх перпендикулярно к ней, запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$M_1 a = M_1 g \sin\alpha - T - F_{\text{тр}1}, \qquad (1)$$

$$M_2 a = M_2 g \sin\alpha + T - F_{\text{тр}2}, \qquad (2)$$

$$0 = N_1 - M_1 g \cos\alpha, \qquad (3)$$

$$0 = N_2 - M_2 g \cos\alpha. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) полученной системы следует, что

$$N_1 = M_1 g \cos\alpha,$$

$$N_2 = M_2 g \cos\alpha.$$

Следовательно, силы трения, действующие на первую и вторую плиты со стороны наклонной плоскости, равны

$$F_{\text{тр}1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 M_1 g \cos\alpha,$$

$$F_{\text{тр}2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Поэтому, если сложить уравнения (1) и (2) системы, получим:

$$(M_1 + M_2)a = (M_1 + M_2)g \sin\alpha - \mu_1 M_1 g \cos\alpha - \mu_2 M_2 g \cos\alpha.$$

Отсюда

$$a = g\sin\alpha - \frac{\mu_1 M_1 + \mu_2 M_2}{M_1 + M_2} g\cos\alpha$$

и, окончательно,

$$a = g\sin\alpha - \frac{\mu_1 \dfrac{M_1}{M_2} + \mu_2}{\dfrac{M_1}{M_2} + 1} g\cos\alpha \approx 3{,}4\,\text{м/с}^2.$$

Ответ: $a \approx 3{,}4$ м/с^2.

Задание 3.

Задание 3.1.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.3 плотность грунта оказалась равной 1.25 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.5, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.6 до 0.7?

Решение

3.1. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}},$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}},$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}.$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}},$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}}.$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1=1.1, x_2 =0.3, y_2=1.25, x_3=0.5, $x_{0\min}$=0.6, $x_{0\max}$ =0.7, получаем

Ответ: [1.325,1.34]

Задание 3.2.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.2 (г/куб. см), а при влажности 0.3 плотность грунта оказалась равной 1.25 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.5, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.6 до 0.7?

Решение

3.2. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1=1.2, x_2 =0.3, y_2=1.25, x_3=0.5, $x_{0\min}$=0.6, $x_{0\max}$ =0.7, получаем

Ответ: [1.275,1.28]

Задание 3.3.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.15 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.25 плотность грунта оказалась равной 1.3 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.35, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.4 до 0.45?

Решение

3.3. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x)=q-a(x-x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1,x_2 заданы значения $y_1=y(x_1), y_2=y(x_2)$ и при заданном условии $x_0\in[x_{0\min},x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i=q-a(x_i-x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{x_0-\frac{x_1+x_2}{2}},$$

$$q=y_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{(x_1-x_0)^2}{x_0-\frac{x_1+x_2}{2}},$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x)=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-\frac{x+x_1}{2}}{x_0-\frac{x_2+x_1}{2}}$. При значении $x=x_3$ получаем

$$y_3=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_0-\frac{x_2+x_1}{2}}.$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min},y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\min}-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\min}-\frac{x_2+x_1}{2}},$$

$$y_{3\max}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\max}-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\max}-\frac{x_2+x_1}{2}}.$$

Подставляя значения x_1 =0.15, y_1=1.1, x_2 =0.25, y_2=1.3, x_3=0.35, $x_{0\min}$=0.4, $x_{0\max}$ =0.45, получаем

Ответ: [1.4,1.42]

Задание 3.4.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.2 (г/куб. см), а при влажности 0.2 плотность грунта оказалась равной 1.3 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.3, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.35 до 0.4?

Решение

3.4. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x)=q-a(x-x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1=y(x_1), y_2=y(x_2)$ и при заданном условии $x_0\in[x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i=q-a(x_i-x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{x_0-\frac{x_1+x_2}{2}} ,$$

$$q=y_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{(x_1-x_0)^2}{x_0-\frac{x_1+x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x)=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-\frac{x+x_1}{2}}{x_0-\frac{x_2+x_1}{2}}$. При значении $x=x_3$ получаем

$$y_3=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_0-\frac{x_2+x_1}{2}}.$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\min}-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\min}-\frac{x_2+x_1}{2}},$$

$$y_{3\max}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\max}-\frac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\max}-\frac{x_2+x_1}{2}}.$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1=1.2, x_2 =0.2, y_2=1.3, x_3=0.3, $x_{0\min}$=0.35, $x_{0\max}$ =0.4, получаем

Ответ: [1.35,1.36]

Задание 3.5.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.12 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.18 плотность грунта оказалась равной 1.4 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.28, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.35 до 0.4?

Решение

3.5. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.12, y_1=1.1, x_2 =0.18, y_2=1.4, x_3=0.28, $x_{0\min}$=0.35, $x_{0\max}$ =0.4, получаем

Ответ: [1.7,1.74]

Задание 3.6.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.2 измерение плотности грунта показало значение 1.1 (г/куб. см), а при влажности 0.4 плотность грунта оказалась равной 1.4 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.6, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.7 до 0.8?

Решение

3.6. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.2, y_1=1.1, x_2 =0.4, y_2=1.4, x_3=0.6, $x_{0\min}$=0.7, $x_{0\max}$=0.8, получаем

Ответ: [1.55,1.58]

Задание 3.7.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.15 измерение плотности грунта показало значение 1.3 (г/куб. см), а при влажности 0.25 плотность грунта оказалась равной 1.5 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.35, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.4 до 0.45?

Решение

3.7. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x)=q-a(x-x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1=y(x_1), y_2=y(x_2)$ и при заданном условии $x_0\in[x_{0\min},x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i=q-a(x_i-x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a=\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{1}{x_0-\dfrac{x_1+x_2}{2}},$$

$$q=y_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{(x_1-x_0)^2}{x_0-\dfrac{x_1+x_2}{2}},$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x)=y_1+(y_2-y_1)\cdot\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\cdot\dfrac{x_0-\dfrac{x+x_1}{2}}{x_0-\dfrac{x_2+x_1}{2}}$. При значении $x=x_3$ получаем

$$y_3=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_0-\dfrac{x_3+x_1}{2}}{x_0-\dfrac{x_2+x_1}{2}}.$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min},y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\min}-\dfrac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\min}-\dfrac{x_2+x_1}{2}},$$

$$y_{3\max}=y_1+(y_2-y_1)\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}\cdot\frac{x_{0\max}-\dfrac{x_3+x_1}{2}}{x_{0\max}-\dfrac{x_2+x_1}{2}}.$$

Подставляя значения x_1 =0.15, y_1=1.3, x_2 =0.25, y_2=1.5, x_3=0.35, $x_{0\min}$=0.4, $x_{0\max}$ =0.45, получаем

Ответ: [1.6,1.62]

Задание 3.8.

Определение зависимости плотности грунта в насыпи от влажности является важной задачей инженерной геологии, поскольку плотность грунта определяет надежность насыпных сооружений. Предполагается квадратичная зависимость плотности грунта от коэффициента влажности. При влажности 0.1 измерение плотности грунта показало значение 1.2 (г/куб. см), а при влажности 0.3 плотность грунта оказалась равной 1.4 (г/куб. см). В каких пределах может изменяться плотность грунта при влажности 0.5, если оптимальная влажность, при которой плотность грунта максимальна, находится на отрезке от 0.6 до 0.7?

Решение

3.8. Представим зависимость плотности породы y от влажности x в виде $y(x) = q - a(x - x_0)^2$, a>0. По условию задачи в точках x_1, x_2 заданы значения $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2)$ и при заданном условии $x_0 \in [x_{0\min}, x_{0\max}]$ требуется определить какие значения может принимать y при значении влажности x_3. Из равенств $y_i = q - a(x_i - x_0)^2$, i=1,2 выражаем

$$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

$$q = y_1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_0 - \frac{x_1 + x_2}{2}} ,$$

откуда для каждого значения коэффициента влажности x значение плотности породы $y(x) = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}}$. При значении $x = x_3$ получаем

$$y_3 = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_0 - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_0 - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Выражение в правой части представляет собой монотонно возрастающую по x_0 функцию, поэтому при возрастании x_0 от $x_{0\min}$ до $x_{0\max}$ получим искомый промежуток $[y_{0\min}, y_{0\max}]$, где

$$y_{3\min} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\min} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\min} - \frac{x_2 + x_1}{2}} ,$$

$$y_{3\max} = y_1 + (y_2 - y_1) \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x_{0\max} - \frac{x_3 + x_1}{2}}{x_{0\max} - \frac{x_2 + x_1}{2}} .$$

Подставляя значения x_1 =0.1, y_1=1.2, x_2 =0.3, y_2=1.4, x_3=0.5, $x_{0\min}$=0.6, $x_{0\max}$=0.7, получаем

Ответ: [1.5,1.52]

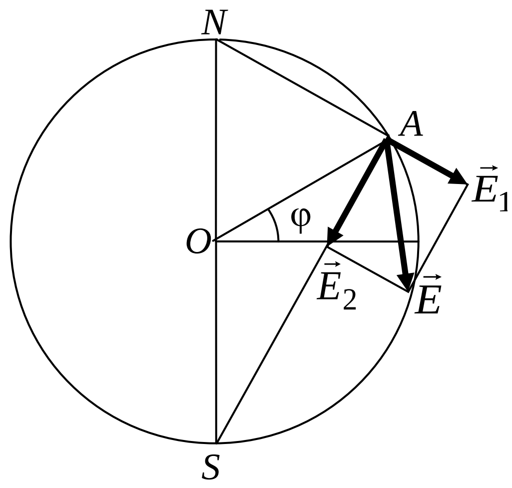
Задание 4.

Задача 4.1

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 2\cdot10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -8\cdot10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение



Задача 4.1.
Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \dfrac{1}{2}\angle NOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot10^{-9}}{0{,}2^2} = 450\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot10^9\cdot8\cdot10^{-9}}{0{,}2^2} = 600\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 750$ В/м.

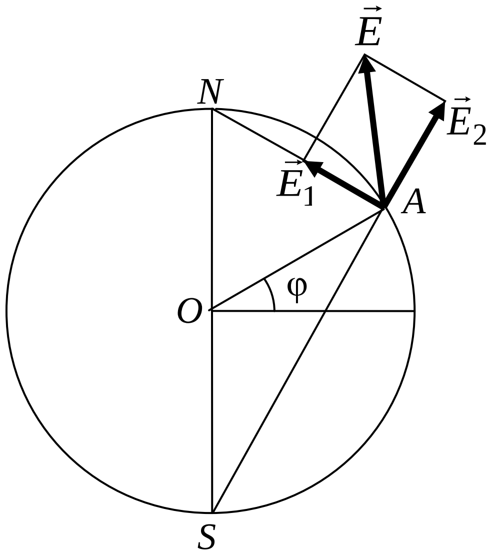
Ответ: *E* = 750 В/м.

Задача 4.2

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = -3\cdot10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 12\cdot10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение



Задача 4.2.
Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \frac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \frac{1}{2}\angle NOA = \frac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 675\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot 10^9 \cdot 12\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 900\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 1125$ В/м.

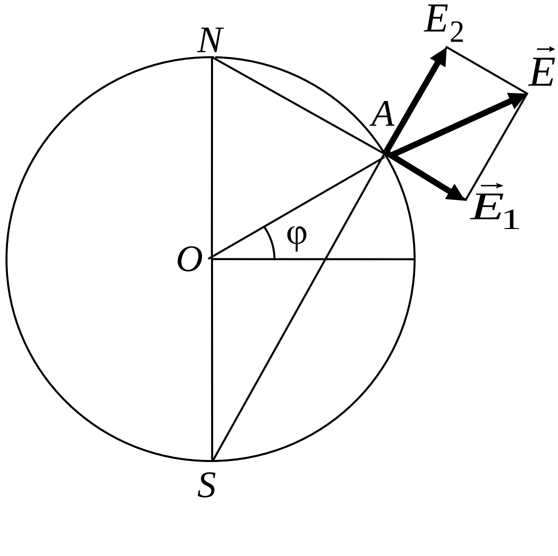
Ответ: *E* = 1125 В/м.

Задача 4.3

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 1\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 4\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение



Задача 4.3.
Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля

каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \dfrac{1}{2}\angle NOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 1\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 225\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 300\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 375\,\text{В/м}$.

Ответ: *E* = 375 В/м.

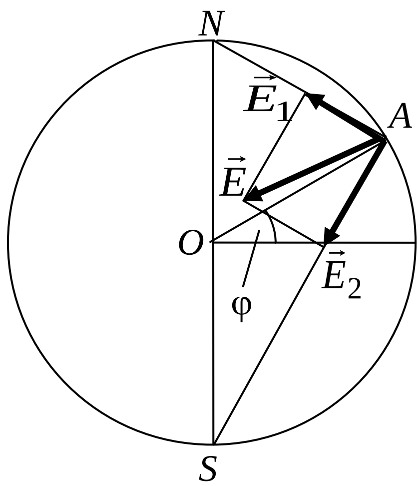
Задача 4.4

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 20 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = -4\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -16\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели $\varphi = 30°$ северной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.4.



Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle NSA = \dfrac{1}{2}\angle NOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R$, $r_2 = AS = R\sqrt{3}$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 4\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 900\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9\cdot 10^9 \cdot 16\cdot 10^{-9}}{0{,}2^2} = 1200\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 1500\,\text{В/м}$.

Ответ: *E* = 1500 В/м.

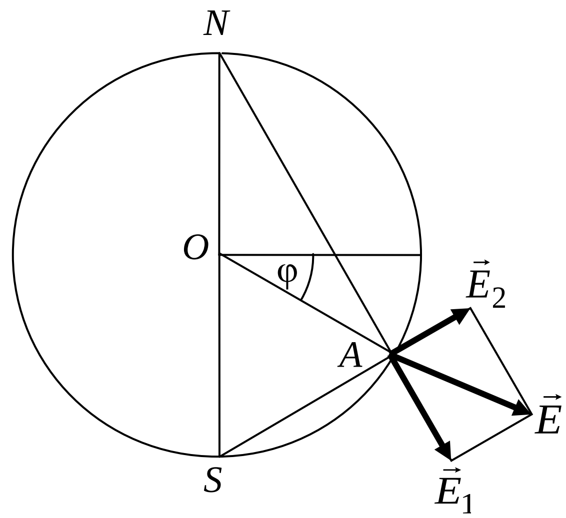
Задача 4.5

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 25 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 2\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 0{,}5\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели φ = 30° южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение

Задача 4.5.



Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае

$\angle SNA = \dfrac{1}{2}\angle SOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому

$r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 2\cdot 10^{-9}}{3\cdot 0{,}25^2} = 96\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 0{,}5\cdot 10^{-9}}{0{,}25^2} = 72\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 120$ В/м.

Ответ: E = 120 В/м.

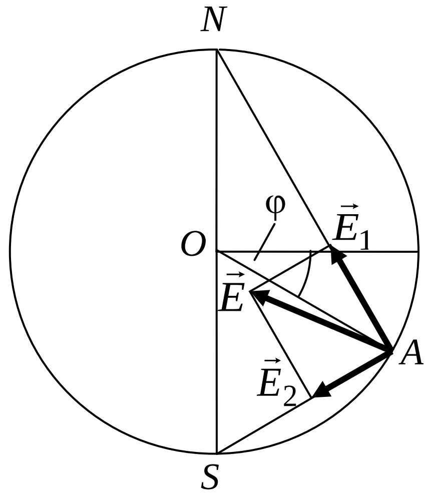
Задача 4.6

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 25 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом
$q_1 = -3\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -0{,}75\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в

точке на поверхности глобуса на параллели $\varphi = 30°$ южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение



Задача 4.6.

Северный полюс глобуса *N*, его южный полюс *S* и точка *A* на широте φ лежат на окружности радиусом *R*, причем точки *N* и *S* находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона:

$E = \dfrac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle SNA = \dfrac{1}{2}\angle SOA = \dfrac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 3\cdot 10^{-9}}{3\cdot 0{,}25^2} = 144\,(\text{В/м}),$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot 0{,}75\cdot 10^{-9}}{0{,}25^2} = 108\,(\text{В/м}).$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 180$ В/м.

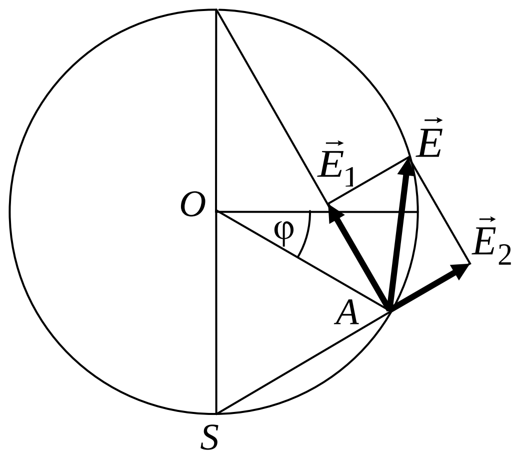
Ответ: *E* = 180 В/м.

Задача 4.7

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом $R = 25$ см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = -4\cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = 1\cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели $\varphi = 30°$ южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение



Задача 4.7.

Северный полюс глобуса *N*, его южный полюс *S* и точка *A* на широте φ лежат на окружности радиусом *R*, причем точки *N* и *S* находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \frac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle SNA = \frac{1}{2}\angle SOA = \frac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 0{,}25^2} = 192 \text{ (В/м)},$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1 \cdot 10^{-9}}{0{,}25^2} = 144 \text{ (В/м)}.$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 240$ В/м.

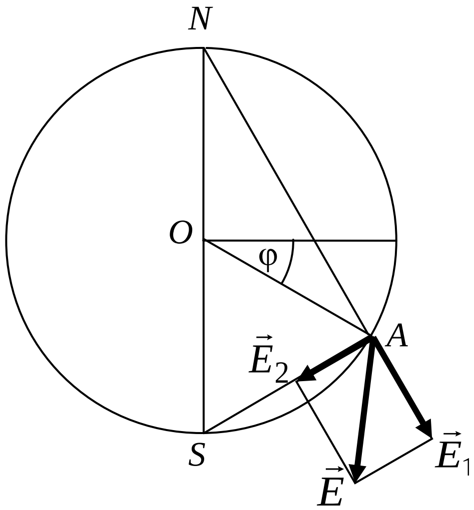
Ответ: *E* = 240 В/м.

Задача 4.8

Одним из важных методов разведки месторождений полезных ископаемых является исследование электромагнитных полей вблизи земной поверхности. Для иллюстрации рассмотрим следующую задачу.

На северном полюсе уединенного глобуса радиусом R = 25 см, изготовленного из тонкого непроводящего материала, расположен маленький металлический шарик с зарядом $q_1 = 6 \cdot 10^{-9}$ Кл, а на его южном полюсе – такой же шарик с зарядом $q_2 = -1{,}5 \cdot 10^{-9}$ Кл. Какова величина результирующей напряженности электрического поля этих зарядов в точке на поверхности глобуса на параллели $\varphi = 30°$ южной широты? Влиянием глобуса на поле зарядов шариков пренебречь.

Решение



Задача 4.8.

Северный полюс глобуса N, его южный полюс S и точка A на широте φ лежат на окружности радиусом R, причем точки N и S находятся на концах ее диаметра (см. рисунок). Независимо от значения φ $\angle NAS = 90°$, т.к. это угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр. Поэтому векторы напряженности поля $\vec{E}_1$ (от заряда q_1) и $\vec{E}_2$ (от заряда q_2) взаимно перпендикулярны и направлены, как показано на рисунке. Модуль напряженности поля каждого из зарядов считаем в соответствии с законом Кулона: $E = \frac{k|q|}{r^2}$.

В нашем случае $\angle SNA = \frac{1}{2}\angle SOA = \frac{1}{2}(90° - \varphi) = 30°$, поэтому $r_1 = AN = R\sqrt{3}$, $r_2 = AS = R$.

Отсюда получаем:

$$E_1 = \frac{k|q_1|}{r_1^2} = \frac{k|q_1|}{3R^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 6 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 0{,}25^2} = 288 \text{ (В/м)},$$

$$E_2 = \frac{k|q_2|}{r_2^2} = \frac{k|q_2|}{R^2} = \frac{9 \cdot 10^9 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-9}}{0{,}25^2} = 216 \text{ (В/м)}.$$

Модуль результирующей напряженности поля: $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = 360$ В/м.

Ответ: *E* = 360 В/м.

Тестовые задания для разминки 1-го тура отборочного этапа:

Какое минимальное число граней может быть у кристалла?
одна
четыре
восемь

Из каких минералов состоит гранит?
Кварц, слюда, полевой шпат
Кальцит, нефелин, пирит
Гранат, магнетит, золото

Что является жидким полезным ископаемым?
Лава
Вода
Радон

Как называется самая верхняя оболочка Земли?
Земная кора
Мантия
Ядро

Что называют каменной оболочкой Земли?
Атмосфера
Гидросфера
Литосфера

Что называют водной оболочкой Земли?
Атмосфера
Гидросфера
Литосфера

Что называют воздушной оболочкой Земли?
Атмосфера
Гидросфера
Литосфера

Что является характерной формой рельефа пустынь?
Бархан
Пойма
Овраг

Что является продуктом извержения вулкана?
Янтарь
Лава
Нефть

На каком полуострове до сих пор происходят извержения вулканов?
Кольский
Крым
Камчатка

Чем образованы дюны, барханы, гряды?
текучими водами
<u>ветром</u>
ледником

Чем сложены дюны, барханы, гряды?
мрамором
водой
<u>песком</u>

Какую форму рельефа образуют реки?
Бархан
<u>Пойма</u>
Холм

Какой минерал самый твердый?
<u>Алмаз</u>
Кальцит
Гипс

В каком периоде произошел расцвет динозавров?
Четвертичном
<u>Юрском</u>
Кембрийском

Какой по счету от Солнца планетой является Земля?
Первой
<u>Третьей</u>
Седьмой

Какой примерный возраст у планеты Земля?
<u>4,5 млрд. лет</u>
2 млн. лет
10 тыс. лет

Какую часть площади поверхности планеты Земля занимают океаны и моря?
10%
<u>70%</u>
98%

Назовите причину морских приливов и отливов.
Воздействие солнечного ветра
Изменения в магнитном поле Земли
<u>Гравитационное воздействие Луны</u>

Сколько у планеты Земля крупных спутников?
<u>Один (Луна)</u>
Три (Луна, Фобос и Деймос)
Два (Луна, Фобос)